高等学校教材

微分几何及其在力学中的应用

武际可　黄克服　编著



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS


ISBN 978-7-301-14537-1
9 787301 145371 >
定价：25.00元

微分几何及其在力学中的应用

武际可　黄克服　编著


北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微分几何及其在力学中的应用/武际可,黄克服编著. —北京:北京大学出版社,2011.9

ISBN 978-7-301-14537-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①武… ②黄… Ⅲ.①微分几何 Ⅳ.①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 005986 号

书　　名:微分几何及其在力学中的应用

著作责任者:武际可　黄克服　编著

责 任 编 辑:曾琬婷

标 准 书 号:ISBN 978-7-301-14537-1/O·0768

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871

网　　址:http://www.pup.cn　　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn

电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62767347
出版部 62754962

印　刷　者:三河市北燕印装有限公司

经　销　者:新华书店

850mm×1168mm　32 开本　9.375 印张　250 千字

2011 年 9 月第 1 版　　2011 年 9 月第 1 次印刷

定　　价:25.00 元

内容简介

本书是作者根据多年来为北京大学力学系研究生和高年级本科生讲授同名课程的讲稿编写而成的，书中系统介绍了微分几何的基础知识。全书共分为六章：第一章介绍了向量和张量的基本性质；第二章给出了欧氏空间中曲线与曲面的几何；第三章引入了流形的概念及若干性质，如向量的 Lie 导数的性质；第四章介绍了流形上的微分形式和外微分运算，并给出了几个重要定理的证明；第五章介绍了 Lie 群与 Lie 代数的性质，特别是在不变量理论中的应用；第六章介绍了动力系统与 Symplectic 几何的理论及其在力学中的应用。每章末配有适量的习题，便于读者选用。

本书叙述简明易懂、逻辑严谨、条理清晰，注重分析及应用，着重在所介绍内容和力学理论的联系上举一些例子，如应变和 Lie 导数的关系、协调方程、Hamilton 力学的几何理论等等。

本书可作为高等院校力学专业研究生或高年级本科生学习微分几何知识的教材，也可供从事与力学相关专业的教学和研究的教师和科研工作者参考。

前　言

几何是关于空间的科学.微分几何是利用微积分研究空间构造的数学学科.

人类关于空间的认识是逐步深化的,最早的知识是对于日常经验中的三维欧氏空间的认识.约公元前300年,古希腊的欧几里得[①]写成的巨著《几何原本》奠定了欧氏几何的基础.1637年法国的笛卡儿[②]发表的《几何学》奠定了解析几何的基础,从而把分析和几何图形联系起来.1788年法国的拉格朗日[③]出版了巨著《分析力学》,引进了用高维空间来描述动力系统的状态.德国高斯[④]的研究工作推进了曲面微分几何的发展,之后他的学生黎曼[⑤]系统发展了微分几何,奠定了流形与黎曼空间的基础.到了20世纪初,意大利的里奇[⑥]和莱维-齐维塔[⑦]发展了一整套流形上的张量分析方法,系统地进行了微分不变量的研究.与此同时,法国的嘉当[⑧]创立了外形式和外微分方法.

力学同数学的发展是同步的,或者说,有什么样的数学就有什么样的力学;反过来,在一定的程度上也可以说,有什么样的力学就有什么样的数学.力学的研究经常是要了解客观事物的质和量

---

① 欧几里得(Euclid,约公元前325—约公元前265),古希腊数学家.

② 笛卡儿(R. Descartes,1596—1650),法国哲学家、物理学家、数学家、生物学家.

③ 拉格朗日(J. L. Lagrange,1736—1813),法国数学家、力学家、天文学家.

④ 高斯(C. F. Gauss,1777—1855),德国数学家、物理学家、天文学家.

⑤ 黎曼(G. F. B. Riemann,1826—1866),德国数学家.

⑥ 里奇(G. Ricci-Curbastro,1853—1925),意大利数学家.

⑦ 莱维-齐维塔(T. Levi-Civita,1873—1941),意大利数学家、物理学家.

⑧ 嘉当(E. Cartan,1869—1951),法国数学家.

两个侧面，而质和量是不可分的，所以力学同数学自古便有紧密联系的传统. 1627年，我国出版了最早的力学著作，即由传教士邓玉函[①]口授、王徵[②]笔录的《远西奇器图说》. 该书在谈到力学与数学的关系时说："造物主之生物，有数、有度、有重，物物皆然. 数即算学，度乃测量学，重则此力艺之重学也. 重有重之性. 以此重较彼重之多寡，则资算学；以此重之形体较彼重之形体之大小，则资测量学. 故数学、度学、重学之必须，盖三学皆从性理而生，为兄弟内亲，不可相离者也."这里说的数学就是计算，度学就是几何，而重学即是力学.

意大利文艺复兴时期的大师达·芬奇[③]说过："力学是数学科学的天堂，因为我们在这里获得数学的成果."牛顿[④]在他1687年出版的《自然哲学的数学原理》的绪言中则把几何学看做力学的一部分，他说："几何学是建立在力学的实践之上的，它无非是普通力学的一部分，能精确地提出并论证测量的方法."

力学是研究物质在空间运动的学科，所以力学尤其是和几何学有着不可分割的联系. 我们可以把从阿基米德[⑤]开始的有限自由度力学与数学的关系的特点归纳如下：

- 从阿基米德到哥白尼[⑥]、斯梯芬[⑦]时代，力学的研究内容主要是静力学和天体的圆运动. 在几何方面的主要工具是欧氏几何，相应的计算工具是常量的代数运算.

---

① 邓玉函(J. Terrenz，1576—1630)，瑞士人.

② 王徵(1571—1644)，陕西泾阳人.

③ 达·芬奇(L. da Vinci，1452—1519)，意大利科学家、画家.

④ 牛顿(I. Newton，1643—1727)，英国数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家.

⑤ 阿基米德(Archimedes，公元前287—公元前212)，希腊数学家、力学家.

⑥ 哥白尼(N. Copernicus，1473—1543)，波兰天文学家.

⑦ 斯梯芬(S. Stevin，1548—1620)，荷兰数学家、工程师.

● 从伽利略[①]、惠更斯[②]到牛顿、莱布尼茨[③]时代，力学研究的主要内容是自由质点的运动，特别是解决在引力作用下的自由质点的运动．在几何方面的主要工具是解析几何，特别是有关圆锥曲线的解析几何．在计算方面的主要工具则是引进了变量，发明了微积分，而且微积分的发明人牛顿与莱布尼茨自己也是著名的力学家，是那个时期的力学学科的开拓者．

● 从拉格朗日到哈密顿[④]和雅可比[⑤]时代，力学主要的研究内容是约束运动．在几何方面的主要工具是引进了 n 维空间的概念，后来经过黎曼的严格化，就是流形或黎曼几何．而在分析方面的主要工具则是引进了泛函的概念，并且发展了求泛函极值的方法，也就是变分法．拉格朗日自己就是早期开拓变分法的主将．

● 在19世纪末，力学又进入了一个重要的新阶段，这就是以庞加莱[⑥]与李亚普诺夫[⑦]为代表的发展动力系统的定性理论时代．定性理论与运动稳定性的研究本来是从天体力学中提出来的一个理论课题，之后发现在一切力学系统中，甚至在由一切非线性常微分方程确定的系统中都有普遍理论与应用意义．简单说，定性理论是研究系统解的性质随参数而变化的方向，例如有没有周期解的变化，有没有极限环的变化，解稳定与不稳定的变化，等等．在几何方面的主要工具就是拓扑学和微分拓扑学，而相应的计算工具是同伦与外微分等．力学中的定性理论的开拓者庞加莱本人也是拓扑学的奠基人之一．至今经过了一百多年的发展，它仍然是世界上都很关心的研究领域．

---

① 伽利略(Galileo，1564—1642)，意大利物理学家、天文学家．

② 惠更斯(C. Huygens，1629—1695)，荷兰物理学家、数学家、天文学家．

③ 莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)，德国数学家、自然科学家、哲学家．

④ 哈密顿(W. R. Hamilton，1805—1865)，英国数学家、物理学家．

⑤ 雅可比(C. G. J. Jacobi，1804—1851)，德国数学家．

⑥ 庞加莱(J. H. Poincaré，1854—1912)，法国数学家、天文学家．

⑦ 李亚普诺夫(A. M. Lyapunov，1857—1918)，俄国数学家、力学家．

这些力学历史发展的事实说明,在力学发展的每一个关键时期,总是要同从前没有研究过的空间和数量模型打交道,力学家并不是坐等数学家解决好了数学工具才动手去工作,而是自己深入到数学中去发明新的数学工具,或者在与数学家的合作中加以解决.因此,在整个力学史上,许多开拓新领域的大力学家也同时是大数学家.即使是沿着他们开拓的路子前进的后继力学家,也必须熟悉前人发明的这些数学工具.

既然力学是研究物质在空间的存在和运动形式,因此对于空间的深入理解就成为深入力学研究的决定性条件.但是,多年来,在力学和技术学科的教育中,一直有一种忽视几何的偏向.一般说来,人们对于分析方面的培养是足够重视的,而在几何方面的大学教育中只涉及很少的知识,一直是只限于解析几何.这种情况近年来正在逐步改变.从20世纪60年代起,在世界范围内,近代微分几何知识迅速向物理界和力学界普及,出现了许多好的微分几何学教科书.古老的力学学科被以现代微分几何语言重新表述,从而开辟了许多新的研究方向.在力学中随着线性问题的逐渐成熟,非线性力学的研究正在兴起,而非线性和大范围的力学问题的研究又要求人们熟悉流形几何.本书正是为适应这种需要和发展趋势而写的.它打算为力学专业的研究生在了解现代微分几何及其与力学的联系上提供一个入门的导引.

全书共分六章.第一章是关于向量和张量的代数.第二章是讨论 n 维欧氏空间的曲纹坐标、向量和张量分析,其中用了相当的篇幅介绍曲线论和曲面论.曲线论和曲面论本来是属于初等微分几何的内容,但是考虑到现在的高等院校本科生力学专业一般没有开设这门课,所以在这里进行了系统的介绍.第三章介绍的是 Riemann 几何.第四章介绍外微分及其应用.第五章介绍 Lie 群及其应用.第六章介绍动力系统和 Symplectic 几何.在内容的叙述中,我们着重在它们与力学理论的联系上举了一些例子.

学习数学不做习题是不行的，对于书中讨论的比较明显的问题或证明比较简单的内容，我们留给读者自行计算或证明. 此外，我们在每一章的后面都附了适量习题，以供读者选用.

武际可　黄克服

2010 年 6 月于北京大学

目　　录

第一章　向量与张量 …… (1)
§1.1　n维实向量空间 …… (1)
一、向量与坐标 …… (1)
二、坐标变换 …… (2)
§1.2　对偶空间 …… (3)
一、线性函数与对偶空间 …… (3)
二、对偶空间中的坐标变换 …… (4)
三、力学中的对偶空间 …… (5)
§1.3　欧氏空间与伪欧氏空间 …… (8)
一、欧氏空间 …… (8)
二、欧氏空间的自对偶性质 …… (10)
三、伪欧氏空间 …… (11)
§1.4　张量 …… (14)
一、张量的定义 …… (14)
二、欧氏空间中的张量 …… (15)
三、张量代数 …… (16)
§1.5　张量的反称化和外积 …… (20)
一、张量的反称化,外形式 …… (20)
二、向量的外积 …… (22)
三、Hodge 星算子 …… (26)
§1.6　几类特殊张量和它们的性质 …… (29)
一、二阶张量与特征值 …… (29)
二、Levi-Civita 符号 …… (30)

习题一 …………………………………………………… (31)
第二章 欧氏空间中的曲纹坐标 …………………………… (32)
§2.1 曲纹坐标与活动标架 …………………………… (32)
一、曲纹坐标……………………………………………… (32)
二、活动标架……………………………………………… (33)
三、活动标架的微商……………………………………… (35)
§2.2 绝对微商 ……………………………………… (38)
一、协变导数……………………………………………… (38)
二、逆变导数……………………………………………… (41)
三、张量的绝对微商……………………………………… (42)
四、正交曲线坐标与非完整系…………………………… (44)
五、张量的物理分量……………………………………… (48)
六、几个常见的微分算子………………………………… (48)
七、两点张量场…………………………………………… (51)
§2.3 欧氏空间中的曲线 …………………………… (52)
一、曲线的参数方程与弧长……………………………… (52)
二、Frenet 公式…………………………………………… (53)
三、曲线的密切性质……………………………………… (57)
四、例子与应用——曲杆的弯曲………………………… (59)
§2.4 曲面论 ………………………………………… (62)
一、欧氏空间的子流形…………………………………… (62)
二、曲面与曲面的弯曲性质……………………………… (64)
三、曲面论的基本方程…………………………………… (67)
四、Gauss 方程与 Codazzi 方程 ………………………… (68)
五、曲面上的曲线，测地曲率与测地线 ………………… (71)
六、曲面上的曲线坐标网………………………………… (72)
§2.5 曲面的无限小弯曲 …………………………… (79)
一、曲面的弯曲变形与无限小弯曲……………………… (79)
二、卵形曲面的刚硬性…………………………………… (82)

§2.6 几种特殊曲面 …………………………………… (85)
一、直纹面与可展曲面 …………………………………… (85)
二、旋转曲面 …………………………………… (88)
三、平行曲面,曲面的焦曲面 …………………………………… (88)
四、伪球面与 Sine-Gordon 方程 …………………………………… (89)
五、Bäcklund 变换 …………………………………… (92)
§2.7 欧氏空间的变换群 …………………………………… (97)
一、变换群 …………………………………… (97)
二、线性变换群 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ …………………………………… (98)
三、线性变换群的某些特殊子群 …………………………………… (100)
四、变换群与其切空间的关系 …………………………………… (102)
五、欧氏空间中的保角变换 …………………………………… (104)
习题二 …………………………………… (109)
第三章 流形与 Riemann 流形 …………………………………… (111)
§3.1 流形 …………………………………… (111)
一、流形的定义 …………………………………… (111)
二、流形上的坐标 …………………………………… (113)
§3.2 流形的切空间 …………………………………… (117)
一、切空间与切丛 …………………………………… (117)
二、余切空间与余切丛 …………………………………… (120)
三、流形上的张量 …………………………………… (122)
§3.3 子流形与 Riemann 流形 …………………………………… (123)
一、流形间光滑映射的诱导映射 …………………………………… (123)
二、子流形 …………………………………… (124)
三、Riemann 流形 …………………………………… (127)
四、Riemann 流形中向量的平行 …………………………………… (128)
§3.4 Riemann 曲率张量 …………………………………… (129)
一、曲率张量的引进 …………………………………… (129)
二、曲率张量的性质 …………………………………… (130)

三、曲率张量的缩并 …………………………… (131)
§3.5 Riemann 流形与力学系统 ………………… (134)
一、有限自由度系统的运动方程 ……………… (134)
二、变形张量的协调方程 ……………………… (134)
习题三 ………………………………………………… (136)
第四章 外微分与 Stokes 定理 …………………… (138)
§4.1 外微分 ……………………………………… (138)
一、微分形式 …………………………………… (138)
二、外微分 ……………………………………… (139)
三、若干例子 …………………………………… (141)
§4.2 Stokes 定理 ………………………………… (143)
一、流形上的积分 ……………………………… (143)
二、Stokes 定理 ………………………………… (146)
三、Stokes 定理的若干应用 …………………… (150)
§4.3 Poincaré 逆定理 …………………………… (151)
一、闭形与恰当形 ……………………………… (151)
二、Poincaré 逆定理 …………………………… (152)
三、Poincaré 逆定理在全局成立的充分条件 …… (155)
四、流形上的对偶关系 ………………………… (156)
§4.4 Lie 导数 …………………………………… (157)
一、流形上的向量场 …………………………… (157)
二、Lie 导数 …………………………………… (159)
三、Lie 导数的性质 …………………………… (161)
§4.5 Frobenius 定理 ……………………………… (162)
一、预备讨论 …………………………………… (162)
二、Frobenius 定理 ……………………………… (165)
三、外微分方程与 Frobenius 定理的第二种形式 …… (170)
四、Frobenius 定理的应用 ……………………… (173)
习题四 ………………………………………………… (176)

第五章　Lie 群与 Lie 代数 ………………………………… (179)
§5.1　基本概念 ………………………………… (179)
一、Lie 群 ………………………………… (179)
二、Lie 群核 ………………………………… (181)
三、Lie 代数 ………………………………… (183)
四、变换诱导的切向量变换 ………………………… (184)
§5.2　Lie 群与 Lie 代数 ………………………… (186)
一、Lie 群的 Lie 代数 ………………………… (186)
二、单参数 Lie 群 ………………………………… (189)
三、Taylor 展式 ………………………………… (191)
§5.3　Lie 群的同态和同构 ………………………… (193)
一、代数系统的同态、同构和自同构 ………………… (193)
二、Lie 代数的矩阵表示 ………………………… (195)
§5.4　不变量 ………………………………… (196)
一、不变量的定义 ………………………………… (196)
二、微分不变量 ………………………………… (199)
三、Killing 向量场 ………………………………… (205)
四、积分不变量 ………………………………… (206)
§5.5　Lie-Bäcklund 变换 ………………………… (208)
一、Lie-Bäcklund 变换 ………………………… (208)
二、Lie-Bäcklund 变换对微分方程的应用 ……… (211)
三、Bäcklund 变换 ………………………………… (212)
§5.6　与变换群有关的某些力学问题 ……………… (215)
一、不变量嵌入法 ………………………………… (215)
二、量纲分析与相似性理论 ………………………… (216)
三、算子与分离变量 ………………………………… (219)
习题五 ………………………………… (222)
第六章　动力系统的几何理论 ………………………… (224)
§6.1　Symplectic 几何与多自由度的
Hamilton 动力系统 ………………………… (224)

一、相空间及其度量 …… (224)
二、Poisson 括弧 …… (226)
三、Symplectic 几何与 Hamilton 动力系统 …… (230)
四、Hamilton-Jacobi 方程 …… (233)
§6.2 Birkhoff 系统 …… (236)
一、Birkhoff 方程 …… (236)
二、Birkhoff 方程的性质 …… (239)
§6.3 动力系统 …… (242)
一、动力系统 …… (242)
二、微分动力系统所确定的流 …… (245)
三、随参数变化的动力系统 …… (247)
§6.4 动力系统的等价和等价类 …… (248)
一、动力系统的等价 …… (248)
二、线性动力系统在奇点邻近的等价 …… (251)
三、非线性动力系统在奇点邻近的等价 …… (255)
四、非自治系统的等价 …… (257)
五、动力系统的稳定性 …… (261)
§6.5 什么是分岔 …… (263)
一、分岔的定义 …… (263)
二、中心流形 …… (265)
三、自治系统含参数解的分岔 …… (267)
§6.6 关于线性非自治系统的等价类问题 …… (270)
一、引言 …… (270)
二、预备讨论 …… (271)
三、线性非自治系统的等价类 …… (273)
名词索引 …… (277)
参考文献 …… (281)

第一章　向量与张量

§1.1　n维实向量空间

一、向量与坐标

定义 1.1　设$\mathscr{V}$是实数域$\mathbb{R}$上的集合.$\mathscr{V}$称为**实向量空间**(简称**向量空间**),如果在$\mathscr{V}$上定义了加法和对实数的乘法这两种运算,即对$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathscr{V}$以及$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,满足:

对于加法,有

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;　　(交换律)

(2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;　　(结合律)

(3) $\exists\boldsymbol{0}\in\mathscr{V}$,使$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;　　(零元素)

(4) $\exists -\boldsymbol{x}\in\mathscr{V}$,使$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$.　　(逆运算)

对于实数的乘法,有

(1) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;

(2) $\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$;　　(数乘的结合律)

(3) $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$;　　(对向量的分配律)

(4) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$.　　(对数乘的分配律)

并且运算的结果仍然属于$\mathscr{V}$,即$\mathscr{V}$关于这两种运算是封闭的.

元素$\boldsymbol{x}\in\mathscr{V}$称为**向量**.如果$\mathscr{V}$中存在$n$个向量线性无关,并且任何$n+1$个向量线性相关(由线性代数知识可知这样的$n$是存在的),则称$\mathscr{V}$为**$n$维线性向量空间**(简称**$n$维向量空间**).一般地,这时我们记$\mathscr{V}$为$\mathscr{L}^n$.

$\mathscr{L}^n$中任意取定的n个线性无关的向量$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$称为它的

一组**基底**.显然,任一向量 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{L}^n$ 可以唯一地表示为

$$\boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{e}_i, \tag{1.1.1}$$

其中 $x^i\in\mathbb{R}\,(i=1,2,\cdots,n)$.这里我们采用 Einstein[1] 约定求和,即凡是上、下标出现相同的指标时表示对这个指标从 1 到 n 求和.本书后面如没有特殊的说明一律采用这种符号.

(1.1.1)式中的 x^i 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的**坐标**.任意一个向量 $\boldsymbol{x}$ 在同一基底上的坐标是唯一的.事实上,设在基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 上有两组坐标:

$$\boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{e}_i = y^i\boldsymbol{e}_i,$$

则两边相减后应有

$$(x^i - y^i)\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}.$$

由于基底是线性无关的,故必然有

$$x^i = y^i \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

即坐标是唯一的.这一事实说明在给定基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 的条件下,$\mathscr{L}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x}$ 与 $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n\}$ 中的点建立了一一对应.

二、坐标变换

由于在 $\mathscr{L}^n$ 中基底是不唯一的,因而当基底改变时,向量的坐标也要相应地变化.设 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 是 $\mathscr{L}^n$ 的一组基底.在 $\mathscr{L}^n$ 中给定一组新基底 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_{i'}\}$:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_{i'} = \alpha_{i'}^{j}\boldsymbol{e}_j, \tag{1.1.2}$$

这里 $\alpha_{i'}^{j}$ 是转换系数.设向量 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{L}^n$ 在新旧基底中的坐标分别为 $\tilde{x}^{i'}$ 与 x^i,即

$$\boldsymbol{x} = \tilde{x}^{i'}\tilde{\boldsymbol{e}}_{i'} = x^i\boldsymbol{e}_i, \tag{1.1.3}$$

则有

---

[1] A. Einstein(1879—1955),德国-美国科学家.

$$x = \tilde{x}^{i'} \tilde{e}_{i'} = \tilde{x}^{i'} \alpha_{i'}^{j} e_j. \tag{1.1.4}$$

比较(1.1.3)与(1.1.4)两式,有

$$x^j = \tilde{x}^{i'} \alpha_{i'}^{j}. \tag{1.1.5}$$

这就是当基底改变时,向量坐标的变换公式.

对照(1.1.2)与(1.1.5)两式,发现基底转换与坐标变换正好反过来.前者用旧基底表示新基底,而后者用新坐标表示旧坐标,两个表达式的转换系数则完全相同.(1.1.5)式的这种转换关系称为**逆变**.

§1.2　对偶空间

一、线性函数与对偶空间

考虑 n 维向量空间 $\mathscr{L}^n$ 上定义的一个**线性函数**:

$$f: \boldsymbol{x} \mapsto y \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathscr{L}^n,$$

它满足:

(1) $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2)$, $\forall\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{L}^n$;

(2) $f(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathscr{L}^n, \alpha \in \mathbb{R}$.

所有 $\mathscr{L}^n$ 上的线性函数 f 组成一个集合 $\mathscr{V}$.

定义 1.2　可以验证,集合 $\mathscr{V}$ 在通常意义的函数加法与数乘运算下构成 n 维线性向量空间.这个向量空间称为 $\mathscr{L}^n$ 的**对偶空间**,记做 $\mathscr{L}^{n*}$,它的元素用 $\boldsymbol{x}^*$ 表示.

关于 n 维向量空间 $\mathscr{L}^n$ 的对偶空间 $\mathscr{L}^{n*}$,有如下的表示定理:

定理 1.1　给定 $\mathscr{L}^n$ 及其基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$,则定义了在 $\mathscr{L}^n$ 上的线性函数 $\boldsymbol{a}^*$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中点的一一对应.

证明　考虑 $\boldsymbol{a}^*$: $\boldsymbol{x} \mapsto y \in \mathbb{R}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathscr{L}^n)$,则

$$\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^*(x^i \boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{e}_i) x^i.$$

令 $\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{e}_i) = a_i$,则有

$$a^*(x) = a_i x^i, \tag{1.2.1}$$

即存在$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$与$a^*$对应. 由线性性质可以看出$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的唯一性是显然的. 故$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$与$a^*$一一对应. ▌

$\mathscr{L}^{n*}$既然是线性空间,它也有基底,记为$\{e^i\}$. 由(1.2.1)式,我们将a_i看做是a^*在基底$\{e^i\}$下的坐标,则有

$$a^*(x) = a_i e^i (x^j e_j) = a_i x^j e^i (e_j).$$

比较(1.2.1)式与上式可知

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

这里δ^i_j称为 **Kronecker**[①] 符号. 因此,一般地,我们有

$$a^*(x) = a_i e^i(x). \tag{1.2.3}$$

上式说明$\mathscr{L}^{n*}$的任意元素均可用$\{e^i(x)\}$来线性表示,且由$\mathscr{L}^{n*}$的线性性质可以证明这种表示法是唯一的. 另外,由于任意的$a^*(x)$都可以由$\{e^i\}$线性表示,故$\mathscr{L}^{n*}$也是n维的.

二、对偶空间中的坐标变换

上述关于对偶空间的引进,告诉我们对偶空间是相互的. 由(1.2.1)式,固定元素a^*,把它当做x的函数来讨论它的值,得到一个$\mathscr{L}^n$上的线性函数;反过来,也可以固定元素x,把它看做a^*的函数来讨论它的值,这就确定了一个$\mathscr{L}^{n*}$上的线性函数. 二者的关系通过(1.2.1)式表示了出来.

现在我们来讨论当基底变化时,对偶空间中坐标的变换. 在$\mathscr{L}^n$中的坐标变换已在§1.1中讨论过. 我们给定$\mathscr{L}^{n*}$中的新基底$\{\tilde{e}^{i'}\}$与旧基底$\{e^i\}$的转换关系为

$$\tilde{e}^{i'} = \beta^{i'}_j e^j, \tag{1.2.4}$$

而$\mathscr{L}^n$中基底的转换关系为(1.1.2)式:

① L. Kronecker(1823—1891),德国数学家.

$$\widetilde{e}_{i'} = \alpha_{i'}^{j} e_j.$$

由 $\mathscr{L}^n$ 与 $\mathscr{L}^{n*}$ 两个空间的对偶性(1.2.2)式，有

$$\widetilde{e}^{i'}(\widetilde{e}_{j'}) = \delta_{j'}^{i'}. \quad e^i(e_j) = \delta_j^i.$$

代入基底的转换关系(1.2.4)，得

$$\widetilde{e}^{i'}(\widetilde{e}_{j'}) = \beta_k^{i'} e^k(\alpha_{j'}^{l} e_l) = \beta_k^{i'} \alpha_{j'}^{l} \delta_l^k = \delta_{j'}^{i'},$$

即

$$\alpha_i^k \beta_k^j = \delta_i^j. \tag{1.2.5}$$

(1.2.5)式表明由 α_i^k 组成的矩阵与由 β_k^j 组成的矩阵是互逆的. 于是由(1.2.5)式可以将(1.2.4)式写为

$$\widetilde{e}^{j'} \alpha_{j'}^{i} = e^i. \tag{1.2.6}$$

而 $\mathscr{L}^{n*}$ 中的任一元素 a^* 可表示为

$$a^* = \widetilde{a}_{i'} \widetilde{e}^{i'} = a_i e^i = a_i \alpha_{j'}^{i} \widetilde{e}^{j'},$$

故有坐标变换

$$\widetilde{a}_{i'} = a_j \alpha_{i'}^{j}. \tag{1.2.7}$$

对偶空间 $\mathscr{L}^{n*}$ 的坐标变换(1.2.7)式与(1.1.2)式是一致的，称为**协变规律**；而对偶基的转换关系(1.2.6)式与(1.1.2)式是不一致的，称为**逆变规律**，它的变换关系与 $\mathscr{L}^n$ 中坐标变换(1.1.5)式正好一样.

三、力学中的对偶空间

上述对偶空间概念的引进，实际上是紧密联系于物理量的描述的. 在力学中就有不少对偶空间. 如三维空间中的质点位移组成一个三维向量空间 $\mathscr{L}^3$，若给定其基底(三个不共面的向量)e_1，e_2，e_3，则任一位移均可由 $u = u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3$ 来表示，这里 u^i 为位移在这组基底上的坐标. 有了位移空间 $\mathscr{L}^3$，我们可以引进其对偶空间. 这个对偶空间实际上描述了空间力向量组成的线性空间. 我们知道，力在位移上做功是一个标量，给定一个力 f 相当于定义了一个在位移空间上做功的线性函数：

$$f: \mathscr{L}^3 \to \mathbb{R}. \tag{1.2.8}$$

令力向量为对偶空间 $\mathscr{L}^{3*}$ 中的元素 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{L}^{3*}$，则 $\boldsymbol{a}$ 在位移空间中做功为

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{u}) = a_1u^1 + a_2u^2 + a_3u^3. \tag{1.2.9}$$

我们看到这种以对偶空间的方式定义力的概念和力学中最初以大小、方向和作用点定义的方式有所不同. 在那里只说明了力是一个向量，而现在不仅说明了力的向量性质而且把它和 $\mathscr{L}^3$ 中元素即位移的关系阐明了，说明了力和位移的对偶关系. 回顾在分析力学中广义力的概念也是这样引进的.

除了位移和力这一对对偶空间之外，在力学和物理学中还有许多对对偶空间. 如固体力学中一点的应变状态和应力状态构成了一对对偶空间，在一般情形下它们是六维的；在分析力学中广义力和广义位移组成一对 n 维的对偶空间；等等.

作为一个例子，我们下面来具体分析一下质点系和刚体的平衡条件及位移约束条件.

设在位移空间 $\mathscr{L}^3$ 中给定一个质点的位移为 $\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{e}_i$，一个将任意的 $\boldsymbol{u}$ 变为 0 的线性函数对应于其对偶空间的零向量，即

$$\boldsymbol{a}:\ \boldsymbol{u}\mapsto 0 \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \in \mathscr{L}^{3*}.$$

由于对偶是相互的，一个将任意向量 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{L}^{3*}$ 变为 0 的线性函数，对应于 $\mathscr{L}^3$ 中的零向量，即

$$\boldsymbol{u}:\ \boldsymbol{a}\mapsto 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \in \mathscr{L}^3.$$

这两个事实说明：在任意位移上做零功的力为零，而在任意力作用下都做零功的位移也为零.

将上述事实加以推广，设在空间中有 m 个质点，每个质点引进一个位移 $\boldsymbol{u}_i(i=1,\cdots,m)$，则这些位移构成一个 $n=3m$ 维的向量空间

$$\mathscr{L}^{3m} = \underbrace{\mathscr{L}^3 \otimes \mathscr{L}^3 \otimes \cdots \otimes \mathscr{L}^3}_{m个};$$

而它的对偶空间相当于在每一点上给定一个力 $\boldsymbol{F}_i$，由这些力所构成的 $3m$ 维空间为 $\mathscr{L}^{3m^*}$.

显然，这个力系在任意位移上做功为零的条件为

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{u}_i = 0. \tag{1.2.10}$$

如果我们给定的位移并不是任意的，比如说 m 个质点是约束在同一个刚体上的，则 $\boldsymbol{u}_i$ 可以表示为

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \tag{1.2.11}$$

这里 $\boldsymbol{u}_0$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 为两个任意的常向量，$\boldsymbol{r}_i$ 为空间质点的坐标向量. 在这一段的讨论中，我们采用通常三维空间中向量的运算. 将(1.2.11)式代入(1.2.10)式，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{u}_0 + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i\right) \cdot \boldsymbol{u}_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i\right) \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0,\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$. 由于 $\boldsymbol{u}_0$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 的任意性，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{1.2.12}$$

这就是刚体的平衡条件.

同样，考虑作用在各点的力系任意变化下都做零功的位移所满足的条件，即考虑(1.2.10)式在 $\boldsymbol{F}_i$ 满足刚体平衡条件(1.2.12)时位移场应当满足的约束条件. 在这种情形下，我们把(1.2.10)与(1.2.12)两式联立，寻求 $\boldsymbol{F}_i$ 任意变化下 $\boldsymbol{u}_i$ 的解空间. 为此，将(1.2.12)式的两个等式分别点乘待定乘子 $\boldsymbol{u}_0$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 两个向量后与(1.2.10)式相减，得

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{u}_i - \left(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i\right) \cdot \boldsymbol{u}_0 - \left(\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i\right) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \tag{1.2.13}$$

显然(1.2.13)式可以化为

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{F}_i \cdot (\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) = 0. \tag{1.2.14}$$

由于上式中 $\boldsymbol{F}_i$ 是任意变化的，于是我们得到

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i. \tag{1.2.15}$$

这也就是刚体位移的约束条件(1.2.11)式.

上面所讨论的刚体在两个相互对偶的空间内满足做零功的相互对偶的两个条件，就是刚体力学中的静力平衡条件((1.2.12)式)和运动学几何条件((1.2.15)式).

§1.3　欧氏空间与伪欧氏空间

一、欧氏空间

定义 1.3　如果在 n 维向量空间 $\mathscr{L}^n$ 上定义了一个对称的、非退化的**双线性齐式** $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$，使对于 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 以及 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathscr{L}^n$，满足：

(1) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$;　　　　(对称性)

(2) $\boldsymbol{x} \cdot (\alpha \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{z}) = \alpha \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \beta \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$;　　(双线性性)

(3) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} > 0, \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$,　　　　(正定性)

则向量空间 $\mathscr{L}^n$ 称为**欧氏空间**，一般记做 $\mathscr{E}^n$.

双线性齐式 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ 的非退化性是指“对 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \neq 0$”，同时，对于任给的 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{E}^n$，若 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \equiv 0$，必有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. 这个性质显然可以由上述的定义的条件(3)直接得到.

在 $\mathscr{E}^n$ 中取定基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$，则有

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x^i \boldsymbol{e}_i) \cdot (y^j \boldsymbol{e}_j) = x^i y^j (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = g_{ij} x^i y^j, \tag{1.3.1}$$

这里我们记

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j, \tag{1.3.2}$$

称之为欧氏空间的**度量系数**. 由(1.3.1)式可以看出双线性齐式由空间的度量系数 g_{ij} 完全确定. 一般地，也将 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 的 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 记为 $\mathbb{R}^n$，这里 δ_{ij} 是 Kronecker 符号，定义同(1.2.2)式.

双线性齐式也称为向量的**内积**. 内积一旦给定则空间的度量性质也就完全确定了. 例如：

(1) 向量 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**：

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} = \sqrt{g_{ij}x^i x^j}; \tag{1.3.3}$$

(2) 两个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的**夹角**：

$$\cos\theta = \cos\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}$$

$$= \frac{g_{ij}x^i y^j}{\sqrt{(g_{ij}x^i x^j)(g_{ij}y^i y^j)}}. \tag{1.3.4}$$

对于上述定义的欧氏空间，下列事实是显然的，即：度量系数组成的矩阵是对称正定的.

事实上，对于 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^n$，由(1.3.3)式及定义 1.3 中的条件(3)，有

$$g_{ij}x^i x^j > 0,\quad \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}. \tag{1.3.5}$$

这说明 $g_{ij}x^i y^j$ 是正定二次型，即(g_{ij})是对称正定矩阵.

要使两向量之间的夹角有意义，需要在(1.3.4)式中满足 $|\cos\theta|\leqslant 1$. 这个结论正确是由于下述的柯西不等式在欧氏空间中是成立的：

由于$(\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\geqslant 0\ (\lambda\in\mathbb{R})$，将此式展开得

$$\lambda^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+2\lambda\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}\geqslant 0.$$

这个不等式成立的充分必要条件是其左边二次三项式的判别式满足

$$(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2-(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y})\leqslant 0,$$

即有 **Cauchy**① **不等式**

$$|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|. \tag{1.3.6}$$

在基底的转换关系(1.1.2)下，度量系数符合如下的变换规律：

$$\tilde{g}_{i'j'} = g_{kl}\alpha^k_{i'}\alpha^l_{j'}. \tag{1.3.7}$$

---

① Cauchy(1789—1857)，法国数学家.

这个式子可直接代入验证. 它说明度量系数符合协变规律. 由于有两个下标量转换,故该变换是二重协变的.

二、欧氏空间的自对偶性质

由于内积的引进,欧氏空间将自己和它的对偶空间对应起来. 事实上,令 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^n$, $\boldsymbol{y}^*\in\mathscr{E}^{n^*}$,则按下面的方式存在 $\boldsymbol{y}\in\mathscr{E}^n$ 与 $\boldsymbol{y}^*$ 一一对应:

$$\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}.$$

建立了这种关系,可知 $\mathscr{E}^n$ 与 $\mathscr{E}^{n^*}$ 同构. 这样我们可以对 $\mathscr{E}^n$ 与 $\mathscr{E}^{n^*}$ 不加区分. 欧氏空间的这种性质称为**自对偶性质**.

由以上事实,当 $\mathscr{E}^n$ 的基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 给定后,可同时定义 $\mathscr{E}^n$ 空间中的基底 $\{\boldsymbol{e}^i\}$ 为其对偶基底. 设

$$\boldsymbol{e}^i=g^{ij}\boldsymbol{e}_j,\tag{1.3.8}$$

两边与 $\boldsymbol{e}_k$ 作内积,得

$$\delta^i_k=g^{ij}g_{jk}.\tag{1.3.9}$$

这表明 (g^{ij}) 是度量系数组成的矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵. 于是可以将(1.3.8)式写成

$$\boldsymbol{e}_i=g_{ij}\boldsymbol{e}^j.\tag{1.3.10}$$

对于任意向量 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{E}^n$,我们有 $\boldsymbol{x}=x^i\boldsymbol{e}_i=x_i\boldsymbol{e}^i$,再利用(1.3.8)式和(1.3.10)式,得

$$\begin{cases}x^i=x_jg^{ij},\\ x_i=x^jg_{ij}.\end{cases}\tag{1.3.11}$$

(1.3.11)式表明,欧氏空间中向量的逆变分量与协变分量之间可以通过度量系数或它的逆来相互变换.

从定义可以看出,欧氏空间的度量系数 g_{ij} 是通过内积引进的,具有一定的特殊性. 下面我们来证明在适当取基底后,度量系数的矩阵是单位矩阵.

定理 1.2　在欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中可适当选取基底使得

$$g_{ij}=\delta_{ij}.\tag{1.3.12}$$

证明　我们引进一个构造性的证明. 设$\{\boldsymbol{e}_i\}$是$\mathscr{E}^n$中的一组基底,满足:

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = g_{ij}.$$

令

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_2 - \dfrac{\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1'}{\boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_1'}\boldsymbol{e}_1', \\ \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_3 - \dfrac{\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1'}{\boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_1'}\boldsymbol{e}_1' - \dfrac{\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2'}{\boldsymbol{e}_2' \cdot \boldsymbol{e}_2'}\boldsymbol{e}_2', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_n' = \boldsymbol{e}_n - \dfrac{\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_1'}{\boldsymbol{e}_1' \cdot \boldsymbol{e}_1'}\boldsymbol{e}_1' - \cdots - \dfrac{\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_{n-1}'}{\boldsymbol{e}_{n-1}' \cdot \boldsymbol{e}_{n-1}'}\boldsymbol{e}_{n-1}'. \end{cases}$$

由上式可以看出,对$\forall\, i \neq j$,有

$$\boldsymbol{e}_i' \cdot \boldsymbol{e}_j' = 0,$$

并且由$\{\boldsymbol{e}_i\}$的线性无关性可得

$$\boldsymbol{e}_i' \neq \boldsymbol{0}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

最后将每一个$\boldsymbol{e}_i'$单位化,令$\boldsymbol{g}_i = \dfrac{\boldsymbol{e}_i'}{\|\boldsymbol{e}_i'\|}$(这里不求和),可得

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta_{ij}.$$

这样,我们就找到了使度量系数δ_{ij}的矩阵为单位矩阵的基底$\{\boldsymbol{g}_i\}$. ▌

定理 1.2 的证明过程称为**标准正交化**(或 **Schmidt**[①] **正交化**)过程,由此得到的基底称为**标准正交基**. 另外,应当说明的是,标准正交基是不唯一的. 不同的标准正交基之间相差一个转换系数矩阵为正交矩阵的基底变换.

三、伪欧氏空间

在定义 1.3 中,如果不要求内积$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$的正定性,即在第(3)条

---

① E. Schmidt(1876—1959),德国数学家.

中不要求“>0”成立，只要求“$\neq 0$”，我们就得到了所谓的**伪欧氏空间**，或称为 **Minkowski**[①] **空间**.

由代数中关于二次型的惯性定理可知，在伪欧氏空间中一定存在一组基底，使得

$$\begin{cases} g_{11} = g_{22} = \cdots = g_{pp} = 1, \\ g_{p+1,p+1} = \cdots = g_{nn} = -1, \\ g_{ij} = 0, \quad i \neq j, \end{cases} \tag{1.3.13}$$

其中 $p<n, q=n-p$ 是两个固定的自然数. 一般记这样的伪欧氏空间为 $\mathscr{E}^n_{p,q}$.

伪欧氏空间在狭义相对论中有着重要的应用. 我们知道狭义相对论的基本假定是所谓的相对性原理及光速不变原理，由此而来的一个重要推论就是任何物体的运动速度 $\boldsymbol{v}$ 不可能超过光速 c，即 $\|\boldsymbol{v}\| \leqslant c$. 由于有这样的限制，在四维的伪欧氏空间 $\mathscr{E}^4_{1,3}$ 中讨论问题就十分方便.

考虑四维时空 $\mathscr{E}^4_{1,3}$ 中的一事件 $(t_1, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ 与另一事件 $(t_2, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$. 两事件之差为

$$(\Delta t, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3) = (t_2 - t_1, x_2^1 - x_1^1, x_2^2 - x_1^2, x_2^3 - x_1^3). \tag{1.3.14}$$

由于我们在 $\mathscr{E}^4_{1,3}$ 中讨论问题，这个向量的长度就定义为

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2, \tag{1.3.15}$$

这里为了方便记 $\Delta x^0 = c\Delta t$.

狭义相对论中的 Lorentz[②] 变换，实际上是一个坐标变换，它将 $\mathscr{E}^4_{1,3}$ 中的一个参考系 (x^0, x^1, x^2, x^3) 变换到另一个相对它的运动速度为常量的参考系 $(\tilde{x}^{0'}, \tilde{x}^{1'}, \tilde{x}^{2'}, \tilde{x}^{3'})$，而保持任意两事件之间的时空间隔(1.3.15)不变. 为了不使推导过程复杂化，我们现在只对二维时空进行讨论. 这时(1.3.15)式变为

① H. Minkowski(1864—1909)，德国数学家.

② H. A. Lorentz(1853—1928)，荷兰物理学家.

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2. \tag{1.3.16}$$

令坐标变换为

$$\begin{cases} x^0 = a_1 \tilde{x}^{0'} + a_2 \tilde{x}^{1'}, \\ x^1 = a_3 \tilde{x}^{0'} + a_4 \tilde{x}^{1'}. \end{cases} \tag{1.3.17}$$

若记变换矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$，我们有

$$\begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}^{0'} \\ \Delta \tilde{x}^{1'} \end{pmatrix}. \tag{1.3.18}$$

利用这个关系，代入(1.3.16)式，得

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0, \Delta x^1) \boldsymbol{G} \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \end{pmatrix} = (\Delta \tilde{x}^{0'}, \Delta \tilde{x}^{1'}) \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}^{0'} \\ \Delta \tilde{x}^{1'} \end{pmatrix}, \tag{1.3.19}$$

这里 $\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是 $\mathscr{E}^2_{1,1}$ 中的度量标准形(度量矩阵). 由于变换保持 Δs^2 的形式不变，即有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{G}. \tag{1.3.20}$$

将(1.3.20)式展开，可得到一组方程：$a_1^2 - a_3^2 = 1, a_1 a_2 - a_3 a_4 = 0, a_2^2 - a_4^2 = -1$. 显然 $a_1 \neq 0$. 若令 $\beta = a_3/a_1$，可求得变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A} = \pm \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \tag{1.3.21}$$

若令 $\beta = v/c$，这里 v 是两个参考系之间的相对速度，c 是光速，取(1.3.21)式的一组解，并将 x^0 换回 t，则变换(1.3.17)式可写为

$$\begin{cases} t = \left(\tilde{t} + \dfrac{v}{c^2} \tilde{x}^{1'}\right) \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ x^1 = (v\tilde{t} + \tilde{x}^{1'}) \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{cases} \tag{1.3.22}$$

这就是著名的 Lorentz 变换.

为了说明伪欧氏空间与欧氏空间之间的区别,我们来考虑三维欧氏空间 $\mathscr{E}^3$ 中相应于上面所谈到的 Lorentz 变换. 在三维欧氏空间 $\mathscr{E}^3$ 中,向量的度量为

$$\Delta s^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2. \tag{1.3.23}$$

当 $\mathscr{E}^3$ 中两个参考系之间以常速相对运动时,下面变换保持度量(1.3.23)的形式不变:

$$\begin{cases} t = \tilde{t}, \\ x^1 = \tilde{x}^{1'} + v\tilde{t}, \ x^2 = \tilde{x}^{2'}, \ x^3 = \tilde{x}^{3'}. \end{cases} \tag{1.3.24}$$

变换(1.3.24)称为 **Galileo 变换**. 经典力学中的时间和空间的转换关系就是采用了这种变换. 比较(1.3.22)与(1.3.24)两式,我们看到当 $v \ll c$ 时,狭义相对论中的 Lorentz 变换就退化为经典力学中的 Galileo 变换了.

§1.4 张 量

一、张量的定义

张量是向量的推广. 它既是物理学和力学的研究对象,也是几何学的研究对象.

在 n 维向量空间 $\mathscr{L}^n$ 中给定基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$,并给定其对偶空间 $\mathscr{L}^{n*}$ 中的基底 $\{\boldsymbol{e}^i\}$,坐标转换为

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{e}}_{i'} = \alpha_{i'}^j \boldsymbol{e}_j, \\ \tilde{\boldsymbol{e}}^{i'} \alpha_{i'}^j = \boldsymbol{e}^j. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

下面给出张量的三种定义:

定义 1.4(张量的分量定义) 给定 n^{p+q} 个数 $T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$,在基底的转换关系(1.4.1)下,这些数在新坐标基底下的表示由如下关系给出:

$$\widetilde{T}^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q}=T^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}\alpha^{i'_1}_{k_1}\cdots\alpha^{i'_p}_{k_p}\alpha^{l_1}_{j'_1}\cdots\alpha^{l_q}_{j'_q}. \tag{1.4.2}$$

这个数组就称为一个 p **次逆变** q **次协变张量**，而在给定基底下的数值称为**张量的坐标**.

定义 1.4′（张量的多重线性函数定义）　令 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_q$ 是 $\mathscr{L}^n$ 中的 q 个向量，而 $\boldsymbol{\xi}^1,\cdots,\boldsymbol{\xi}^p$ 是 $\mathscr{L}^{n*}$ 中的 p 个向量. 给定一个定义在这 $p+q$ 个向量上的多重线性函数：

$$F:(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_q,\boldsymbol{\xi}^1,\cdots,\boldsymbol{\xi}^p)\mapsto y\in\mathbb{R},$$

其中

$$F=T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}x^{j_1}_1\cdots x^{j_q}_q\xi^1_{i_1}\cdots\xi^p_{i_p}, \tag{1.4.3}$$

即 F 对每个变量均是线性的. 这个多重线性函数的系数就构成一个 p **次逆变** q **次协变张量**.

定义 1.4″（张量的并矢定义）　对于给定的 $\mathscr{L}^n$ 和 $\mathscr{L}^{n*}$ 的基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 和 $\{\boldsymbol{e}^i\}$，形式地记 $\boldsymbol{e}_{i_1}\cdots\boldsymbol{e}_{i_p}\boldsymbol{e}^{j_1}\cdots\boldsymbol{e}^{j_q}$ 共 n^{p+q} 个并矢为

$$\underbrace{\mathscr{L}^n\otimes\cdots\otimes\mathscr{L}^n}_{p\text{个}}\otimes\underbrace{\mathscr{L}^{n*}\otimes\cdots\otimes\mathscr{L}^{n*}}_{q\text{个}}$$

的基底. 这时一个 p **次逆变** q **次协变张量**定义为

$$\boldsymbol{T}=T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\boldsymbol{e}_{i_1}\cdots\boldsymbol{e}_{i_p}\boldsymbol{e}^{j_1}\cdots\boldsymbol{e}^{j_q}. \tag{1.4.4}$$

容易验证以上三种张量的定义是等价的.

第一种定义强调了张量的坐标分量及其在坐标变换下的转换关系. 第二种定义着重于张量作为多重线性函数的性质，通常物理学中张量的函数性质和前面 §1.2 中对偶空间向量的引进一样，利用了多重线性函数的性质. 今后，我们将较多地用这个定义. 第三种定义则是纯粹形式上对向量的推广. 这三种定义各自有其方便之处. 另外，可以验证在 $\mathscr{L}^n$ 上定义的 (p,q) 阶张量构成一个 n^{p+q} 维的向量空间（这里 (p,q) **阶张量**是指 p 次逆变 q 次协变张量. 有时简称 $(p,0)$ 或 $(0,p)$ 阶张量为 p 阶张量）.

二、欧氏空间中的张量

在欧氏空间中，度量系数 g_{ij} 构成一个二阶协变张量，这一点可

由其定义直接得出. 同样,需要说明的是 g^{ij} 也是一个二阶张量,服从逆变规律,是二阶逆变张量. 另外,欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 的基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 及其对偶基底 $\{\boldsymbol{e}^i\}$ 可以看做是同一空间的两组基底,这两组基底之间的转换关系为

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_i = g_{ij}\boldsymbol{e}^j, \\ \boldsymbol{e}^i = g^{ij}\boldsymbol{e}_j. \end{cases} \tag{1.4.5}$$

从(1.4.5)式我们可看出,通过张量 (g_{ij}) 将向量 $\boldsymbol{e}^i$ 的指标降下来,而通过张量 (g^{ij}) 则使向量 $\boldsymbol{e}_i$ 的指标升上去了. 这类运算称为**张量指标的升降**. 指标的升降对任何张量均适用. 对于欧氏空间中的张量 $\left(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)$,可以令

$$T^{i_2\cdots i_p}_{i_1 j_1\cdots j_q} = g_{i_1 j} T^{j i_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}. \tag{1.4.6}$$

显然我们可以将 $T^{i_2\cdots i_p}_{i_1 j_1\cdots j_q}$ 与 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ 看做同一张量在不同基底下的坐标分量. 同样有

$$T^{j_1 i_1\cdots i_p}_{j_2\cdots j_q} = g^{ij_1} T^{i_1\cdots i_p}_{ij_2\cdots j_q}. \tag{1.4.7}$$

在欧氏空间中,如果取某组基底使 $g_{ij}=\delta_{ij}$,这时显然也有 $g^{ij}=\delta^{ij}$. 在这种情形下,

$$\boldsymbol{e}^i = g^{ij}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i. \tag{1.4.8}$$

这就说明协变基底与逆变基底是一致的,因而在协变基底与逆变基底下的坐标也可以不加区分. 物理学与力学中直角坐标下的张量就是不区分逆变与协变的.

三、张量代数

1. 张量的加法

两个同阶张量 $\left(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)$ 与 $\left(S^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)$ 之间可以定义加法如下:

$$(T+S)^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} + S^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}. \tag{1.4.9}$$

显然,两张量之和仍然是张量. 另外,张量的加法满足交换律和结合律,并且存在零张量.

2. 张量的乘法

任何两个张量均可以相乘，乘积称为两个张量的张量积. 两个张量 $\boldsymbol{T}=\left(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)$ 与 $\boldsymbol{S}=\left(S^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\right)$ 的**张量积**定义为

$$(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S})^{i_1\cdots i_{p+k}}_{j_1\cdots j_{q+l}} = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}S^{i_{p+1}\cdots i_{p+k}}_{j_{q+1}\cdots j_{q+l}}. \qquad (1.4.10)$$

张量积的阶数为相乘的两张量阶数之和. 容易验证张量的乘法满足结合律和对张量加法的分配律，但一般说来是不可交换的.

数乘张量为零阶张量和张量之积. 另外，向量的张量积称为简单张量. 由基向量相乘得到的张量积（也称为并矢）可以看做是张量的基底.

3. 张量的缩并

对于给定的(p,q)阶张量 $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$，定义对其第 k 个逆变指标和第 l 个协变指标的**缩并**为

$$S^{i_1\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{q-1}} = T^{i_1\cdots i_{k-1}\ddot{u}_k\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{l-1}\ddot{y}_l\cdots j_q}\left(=\sum_{i=1}^{n}T^{i_1\cdots i_{k-1}\ddot{u}_{k+1}\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{l-1}\ddot{y}_{l+1}\cdots j_q}\right). \qquad (1.4.11)$$

易于验证张量经过缩并运算后仍是张量. 张量的缩并运算使(p,q)阶张量降阶为$(p-1,q-1)$阶张量. 定义了张量的缩并运算以后，我们发现，欧氏空间中张量指标的升降运算实际上是在张量与度量系数张量相乘以后再进行一次缩并运算所得.

偶数阶张量经过一定的缩并以后可以得到其不变量，即不随坐标基底变化而变化的标量，并且可以证明张量的任何有理不变量都可以由张量经过适当的张量积和缩并运算得到.

4. 张量的对称和反称

定义 1.5　一张量对于一组同类（逆变或协变）指标称为是**对称的**，如果经过这组同类指标的任意排列后，其坐标的数值不变.

我们知道，任意两个排列都可以经过逐次的两个指标的互换从一个排列到达另一个，因此张量的对称相当于在这组指标中的任何对换而坐标值不变.

张量的对称性是其内在的性质. 要证明这一点只需验证张量的对称性与坐标基底的选取是无关的，即若 $T_{ij} = T_{ji}$，则有 $\widetilde{T}_{ij} = \widetilde{T}_{ji}$. 而这一点是显然成立的.

定义了张量的对称性后，类似地可定义张量的反称性.

定义 1.6　一张量对于一组同类指标称为**反称**的，如果经过这组指标的任意奇排列后，其坐标的数值变号，即对换这组指标中的任意两个指标时张量的坐标值变号.

和张量对称性一样，反称性也是张量的内在性质，与坐标基底的选取无关.

一张量对一组同类指标的**对称化**，是指由该张量生成一个新的对称张量，方法是对这组指标的所有可能的排列的坐标值取算术平均值.

例如，若用$(T_{(ij)k(l)})$表示对张量(T_{ijkl})的 i,j,l 这三个指标的对称化张量(将对称化的一组指标用圆括号括起来)，则由定义有

$$T_{(ij)k(l)} = \frac{1}{3!}(T_{ijkl} + T_{ilkj} + T_{jikl} + T_{jlki} + T_{likj} + T_{ljki}).$$

(1.4.12)

一张量对一组同类指标的**反称化**，是指由这个张量生成一个反称张量，方法与张量的对称化类似，不同的是对该组指标的奇排列时的坐标值加上负号，偶排列时的坐标值加上正号，再进行算术平均. 类似地，张量(T_{ijkl})对指标 i,j,l 的反称化张量记做$(T_{[ij]k[l]})$(将反称化的一组指标用方括号括起来)，由定义有

$$T_{[ij]k[l]} = \frac{1}{3!}(T_{ijkl} - T_{ilkj} - T_{jikl} + T_{jlki} + T_{likj} - T_{ljki}).$$

(1.4.13)

显然，若张量对一组同类指标原来就是对称的，则对这组指标对称化以后张量不变；同样，若张量对一组同类指标原来就是反称的，则对这组指标反称化以后张量也不变.

为了方便起见，下面引入一组记号，这些记号在以后的章节中会经常用到.

定义 1.7　广义 Kronecker 符号定义为

$$\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}=\begin{cases}1, & i_1\cdots i_p\text{ 无重复指标},j_1\cdots j_p\text{ 是 }i_1\cdots i_p\text{ 的偶排列},\\ -1, & i_1\cdots i_p\text{ 无重复指标},j_1\cdots j_p\text{ 是 }i_1\cdots i_p\text{ 的奇排列},\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

(1.4.14)

利用坐标变换公式(1.4.2)可以验证$\left(\delta^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_p}\right)$是一个$(p,p)$阶张量. 这个张量对上、下标都是反称的.

定义 1.8　设σ是数组$(1,\cdots,k)$的某一种排列,定义σ在数组$(j_1,\cdots,j_k)$上的作用为$\sigma(j_1,\cdots,j_k)=(\sigma(j_1),\cdots,\sigma(j_k))$. 记数组$(1,\cdots,k)$的所有排列组成的集合为$\mathscr{S}_k$.

有了以上的记号,我们可以记对称化张量和反称化张量如下:

(1) 张量$\left(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)$对指标$j_1\cdots j_k(k\leqslant q)$的对称化张量坐标为

$$T^{i_1\cdots i_p}_{(j_1\cdots j_k)j_{k+1}\cdots j_q}=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_k}T^{i_1\cdots i_p}_{\sigma(j_1,\cdots,j_k)j_{k+1}\cdots j_q};\qquad(1.4.15)$$

(2) 张量$\left(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)$对指标$j_1\cdots j_k(k\leqslant q)$的反称化张量坐标为

$$T^{i_1\cdots i_p}_{[j_1\cdots j_k]j_{k+1}\cdots j_q}=\frac{1}{k!}\delta^{l_1\cdots l_k}_{j_1\cdots j_k}T^{i_1\cdots i_p}_{l_1\cdots l_kj_{k+1}\cdots j_q}=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_k}\mathrm{sgn}(\sigma)T^{i_1\cdots i_p}_{\sigma(j_1,\cdots,j_k)j_{k+1}\cdots j_q},$$

(1.4.16)

这里$\mathrm{sgn}(\sigma)$表示$\sigma(j_1,\cdots,j_k)$这个排列的符号,偶排列为正号,奇排列为负号.

5. 张量的内积

张量的内积是向量内积的推广. 对于给定的两个同阶张量:

$$\boldsymbol{T}=\left(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)\quad\text{和}\quad\boldsymbol{S}=\left(S^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right),$$

定义它们之间的内积为

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}=\frac{1}{(p+q)!}g_{i_1k_1}\cdots g_{i_pk_p}g^{j_1l_1}\cdots g^{j_ql_q}T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}S^{k_1\cdots k_p}_{l_1\cdots l_q}.$$

(1.4.17)

容易看出张量的内积是一个标量,满足交换律.需要提醒的是,张量的内积不是代数运算.

§1.5 张量的反称化和外积

一、张量的反称化,外形式

在上一节中引进了张量的反称化的概念.反称张量在几何上有着很特殊的结构.现在我们来讨论一下反称张量的性质.为了方便起见,这里我们只对**全反称化**(也就是对所有指标均反称化的张量)张量进行研究.记张量 $\boldsymbol{T}$ 的反称化张量为$[\boldsymbol{T}]$,由定义显然有

$$[\lambda\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}]=\lambda[\boldsymbol{T}]+[\boldsymbol{S}], \tag{1.5.1}$$

$$[\boldsymbol{T}\otimes[\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{R}]]=[[\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}]\otimes\boldsymbol{R}], \tag{1.5.2}$$

其中(1.5.1)式中的 $\boldsymbol{T}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 是同阶张量.上述两式就是所谓反称化运算的线性性质与对张量积的结合律.

定义 1.9 向量空间 $\mathscr{L}^n$ 上的 p 阶反对称张量,即 p 次反对称多重线性函数,称为 $\mathscr{L}^n$ 上的 p **次外形式**.

显然 $\mathscr{L}^n$ 上的全体 p 次外形式组成空间 $\mathscr{L}^{n^p}$ 的一个子空间.这是由于全体 p 阶张量组成的空间是 n^p 维的,反称化以后得到它的子空间,是 C_n^p 维的.p 次外形式组成的子空间记做 $\mathscr{L}_{[p]}^n$.

几种特殊的 $\mathscr{L}_{[p]}^n$:$\mathscr{L}_{[0]}^n=\mathbb{R}$ 是实数空间;$\mathscr{L}_{[1]}^n=\mathscr{L}^{n^*}$ 是 $\mathscr{L}^n$ 的对偶空间;当 $p>n$ 时,$\mathscr{L}_{[p]}^n=\{\boldsymbol{0}\}$ 只有零元素.

类似于欧氏空间中向量的叉乘,可以定义外形式的外积如下:

定义 1.10 令 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathscr{L}_{[p]}^n$,$\boldsymbol{\psi}\in\mathscr{L}_{[q]}^n$ 是两个外形式,则定义它们之间的**外积**为

$$\boldsymbol{\varphi}\wedge\boldsymbol{\psi}=\frac{(p+q)!}{p!q!}[\boldsymbol{\varphi}\otimes\boldsymbol{\psi}]. \tag{1.5.3}$$

如果按照多重线性函数的张量定义(1.4.3)式,外积作为一个

多重线性函数的定义为

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\varphi}\wedge\boldsymbol{\psi})(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{p+q})\\
&=\frac{1}{p!q!}\delta^{j_1\cdots j_{p+q}}_{1\cdots p+q}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{x}_{j_p})\cdot\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_{j_{p+1}},\cdots,\boldsymbol{x}_{j_{p+q}})\\
&=\sum_{j_1<\cdots<j_{p+q}}\delta^{j_1\cdots j_{p+q}}_{1\cdots p+q}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{x}_{j_p})\cdot\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}_{j_{p+1}},\cdots,\boldsymbol{x}_{j_{p+q}}),
\end{aligned}
\tag{1.5.4}
$$

这里用到了反称的定义(1.4.16)式,其中后一等式的正确性是因为 $\boldsymbol{\varphi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 的反对称性质.

外积运算,实际表示了对两个张量的张量积轮换求和.例如,对偶空间 $\mathscr{L}^{n*}$ 中的两个一阶张量即向量(自然是反对称的)的外积为

$$
\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{x},\quad\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{L}^{n*}.\tag{1.5.5}
$$

显然,可以通过定义 1.10 由 $\mathscr{L}^n$ 中的一组基底来定义 $\mathscr{L}^n_{[p]}$ 中的基底.

由定义 1.10,容易验证外形式的外积运算具有如下**性质**:

$$
\lambda\wedge\boldsymbol{\psi}=\lambda\boldsymbol{\psi},\quad\lambda\in\mathbb{R},\tag{1.5.6}
$$

$$
\boldsymbol{\psi}\wedge(\lambda\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\theta})=\lambda\boldsymbol{\psi}\wedge\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi}\wedge\boldsymbol{\theta},\tag{1.5.7}
$$

$$
\boldsymbol{\varphi}\wedge(\boldsymbol{\psi}\wedge\boldsymbol{\theta})=(\boldsymbol{\varphi}\wedge\boldsymbol{\psi})\wedge\boldsymbol{\theta},\tag{1.5.8}
$$

$$
\boldsymbol{\varphi}\wedge\boldsymbol{\psi}=(-1)^{pq}\boldsymbol{\psi}\wedge\boldsymbol{\varphi},\tag{1.5.9}
$$

其中最后一个性质假定了 $\boldsymbol{\varphi}\in\mathscr{L}^n_{[p]}$ 和 $\boldsymbol{\psi}\in\mathscr{L}^n_{[q]}$,它的证明只要考虑排列

$$
\sigma=\begin{pmatrix}1&\cdots&q&q+1&\cdots&p+q\\p+1&\cdots&p+q&1&\cdots&p\end{pmatrix}
$$

的符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^{pq}$.

上述四条性质分别称为外积运算的**数乘性质**、**线性性质**、**结合律**及**斜交换律**.特别地,当 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}$ 为两个一阶张量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$,即向量时,有

$$
\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{x},\tag{1.5.10}
$$

$$
\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.\tag{1.5.11}
$$

这个性质类似于通常三维空间中向量的叉乘运算. 另外,由斜交换律可以看出当 p 或 q 为偶数时,即只要做外积的两个外形式中有一个是偶次时,外积运算总是可交换的.

定义在向量空间 $\mathscr{L}^n$ 上的外形式一共有 $n+1$ 个向量空间,即 $\mathscr{L}^n_{[0]},\mathscr{L}^n_{[1]},\cdots,\mathscr{L}^n_{[n]}$. 它们实际上包括了 $\mathscr{L}^n$ 上所有可能的外形式. 将这 $n+1$ 个集合放在一起组成一个大集合 $\mathscr{G}(\mathscr{L}^n)$,定义为

$$\mathscr{G}(\mathscr{L}^n)=\mathscr{L}^n_{[0]}\oplus\mathscr{L}^n_{[1]}\oplus\cdots\oplus\mathscr{L}^n_{[n]},\tag{1.5.12}$$

这里符号"$\oplus$"表示向量空间的直和. 如果在此集合中定义两种运算: 外积"$\wedge$"及加法"$+$",则这个集合在上述两种运算之下组成一个代数,称为**外代数**,也称为 **Grassmann**[①] **代数**. 这个代数中加法和外积之间服从分配律:

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\varphi}_i\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{\psi}_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{\varphi}_i\wedge\boldsymbol{\psi}_j,\tag{1.5.13}$$

并且有

$$\mathscr{L}^n_{[p]}\wedge\mathscr{L}^n_{[q]}\subset\mathscr{L}^n_{[p+q]},\quad p+q\leqslant n,$$
$$\mathscr{L}^n_{[p]}\wedge\mathscr{L}^n_{[q]}=\{\mathbf{0}\}\subset\mathscr{L}^n_{[0]},\quad p+q>n.$$

二、向量的外积

前面曾经提到张量的外积是向量的叉乘的一种推广. 在物理学和力学中,我们对向量的叉乘是十分熟悉的,这里专门讨论向量之间的外积.

给定 $\mathscr{L}^n$ 中的 p 个向量 $\boldsymbol{x}_i=x_i^j\boldsymbol{e}_j\ (i=1,\cdots,p)$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{x}_p&=(x_1^{i_1}\boldsymbol{e}_{i_1})\wedge(x_2^{i_2}\boldsymbol{e}_{i_2})\wedge\cdots\wedge(x_p^{i_p}\boldsymbol{e}_{i_p})\\&=x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_p^{i_p}\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_p}\\&=\sum_{j_1<\cdots<j_p}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_p^{i_p}\delta_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_p}\boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\boldsymbol{e}_{j_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_p}\end{aligned}$$

---

① H. G. Grassmann(1809—1877),德国数学家、语言学家.

$$= \sum_{j_1 < \cdots < j_p} \begin{vmatrix} x_1^{j_1} & x_1^{j_2} & \cdots & x_1^{j_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_p^{j_1} & x_p^{j_2} & \cdots & x_p^{j_p} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \boldsymbol{e}_{j_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j_p},$$

即

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p = \frac{1}{p!} \begin{vmatrix} x_1^{j_1} & x_1^{j_2} & \cdots & x_1^{j_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_p^{j_1} & x_p^{j_2} & \cdots & x_p^{j_p} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \boldsymbol{e}_{j_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j_p}. \tag{1.5.14}$$

上述推导过程中利用了外积的线性性质与行列式的定义.(1.5.14)式实质上是将反称化张量的外积的定义应用于 p 个向量的连续外积的情形.

由于向量的外积仍然是张量,在欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中,就可以像张量的内积那样来定义其标量积. 首先我们对 $\mathscr{E}^n$ 中基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 的外积进行讨论. 令

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p},$$
$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \boldsymbol{e}_{j_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j_p},$$

则由外积的定义(1.5.3)式和反称化张量的表达式(1.4.16)可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} &= \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} = \frac{p!}{(p-1)! \cdot 1!}[(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_{p-1}}) \otimes \boldsymbol{e}_{i_p}] \\ &= \frac{p!}{(p-1)! \cdot 1!}\left[\frac{(p-1)!}{(p-2)! \cdot 1!}[(\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_{p-2}}) \otimes \boldsymbol{e}_{i_{p-1}}] \otimes \boldsymbol{e}_{i_p}\right] \\ &= \cdots = p![\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p}] \\ &= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) \boldsymbol{e}_{\sigma(i_1)} \otimes \boldsymbol{e}_{\sigma(i_2)} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{\sigma(i_p)}. \end{aligned}$$

注意上面等式中的方括号均表示反称化运算. 上式也可记为

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} = \delta_{i_1 \cdots i_p}^{k_1 \cdots k_p} \boldsymbol{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{k_p}. \tag{1.5.15}$$

于是外形式 $\boldsymbol{\varphi}$ 与 $\boldsymbol{\psi}$ 的内积可定义为

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} = \left(\delta_{i_1 \cdots i_p}^{k_1 \cdots k_p} \boldsymbol{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{k_p}\right) \cdot \left(\delta_{j_1 \cdots j_p}^{l_1 \cdots l_p} \boldsymbol{e}_{l_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{l_p}\right)$$

$$= \frac{1}{p!} g_{k_1 l_1} g_{k_2 l_2} \cdots g_{k_p l_p} \delta^{k_1 \cdots k_p}_{i_1 \cdots i_p} \delta^{l_1 \cdots l_p}_{j_1 \cdots j_p}$$

$$= \frac{1}{p!} \begin{vmatrix} g_{i_1 l_1} & \cdots & g_{i_1 l_p} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{i_p l_1} & \cdots & g_{i_p l_p} \end{vmatrix} \delta^{l_1 \cdots l_p}_{j_1 \cdots j_p},$$

因此

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & \cdots & g_{i_1 j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{i_p j_1} & \cdots & g_{i_p j_p} \end{vmatrix}. \tag{1.5.16}$$

有了以上的讨论，考虑由向量的外积组成的外形式的内积. 令

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p, \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{y}_1 \wedge \boldsymbol{y}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{y}_p,$$

则由(1.5.14)式和(1.5.16)式，有

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} = \left(\frac{1}{p!} \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & x_1^{i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_p^{i_1} & \cdots & x_p^{i_p} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} \right)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{p!} \begin{vmatrix} y_1^{j_1} & \cdots & y_1^{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ y_p^{j_1} & \cdots & y_p^{j_p} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{j_p} \right)$$

$$= \frac{1}{(p!)^2} \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & x_1^{i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_p^{i_1} & \cdots & x_p^{i_p} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1^{j_1} & \cdots & y_1^{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ y_p^{j_1} & \cdots & y_p^{j_p} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & \cdots & g_{i_1 j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{i_p j_1} & \cdots & g_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

再应用行列式的性质，得

$$\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} = \begin{vmatrix} g_{ij} x_1^i y_1^j & \cdots & g_{ij} x_1^i y_p^j \\ \vdots & & \vdots \\ g_{ij} x_p^i y_1^j & \cdots & g_{ij} x_p^i y_p^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{x}_p \cdot \boldsymbol{y}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_p \cdot \boldsymbol{y}_p \end{vmatrix}. \tag{1.5.17}$$

我们也可以这样推导：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\psi}&=(x_1^{i_1}\cdots x_p^{i_p}\boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{i_p})\cdot(y_1^{j_1}\cdots y_p^{j_p}\boldsymbol{e}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_{j_p})\\&=x_1^{i_1}\cdots x_p^{i_p}y_1^{j_1}\cdots y_p^{j_p}\det(g_{i_kj_l})_p\\&=\det(\boldsymbol{x}_i\cdot\boldsymbol{y}_j)_p.\end{aligned}$$

例如，在通常的三维欧氏空间中，三个向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ 的外积 $\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2\wedge\boldsymbol{x}_3$ 对自身的内积为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2\wedge\boldsymbol{x}_3)\cdot(\boldsymbol{x}_1\wedge\boldsymbol{x}_2\wedge\boldsymbol{x}_3)&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_3\\ \boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{x}_3\\ \boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{x}_3\end{vmatrix}\\&=\{(\boldsymbol{x}_1\times\boldsymbol{x}_2)\cdot\boldsymbol{x}_3\}^2.\end{aligned}\tag{1.5.18}$$

讨论了向量外积的内积以后，接下来我们看下面两个由向量叉乘的性质推广而来的定理.

定理 1.3　设 $\boldsymbol{\omega}^i$ 与 $\boldsymbol{\varphi}_i(i=1,2,\cdots,p\leqslant n)$ 是 $\mathscr{L}^n$ 中的两组向量，其中$\{\boldsymbol{\omega}^i\}$是线性无关的. 若对所有的 i 有

$$\boldsymbol{\omega}^i\wedge\boldsymbol{\varphi}_i=\mathbf{0}\quad(\text{对 } i=1,2,\cdots,p \text{ 不求和}),$$

则存在 $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}\,(i,j=1,2,\cdots,p)$，使

$$\boldsymbol{\varphi}_i=\sum_{j=1}^{p}\alpha_{ij}\boldsymbol{\omega}^j,\quad\text{且}\quad\alpha_{ij}=\alpha_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,p).$$

证明　由于$\{\boldsymbol{\omega}^i\}$是线性无关的，因而可以将其扩充为一组基底. 令这组基底为$\{\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^p,\boldsymbol{\omega}^{p+1},\cdots,\boldsymbol{\omega}^n\}$，这里 $\boldsymbol{\omega}^{p+1},\cdots,\boldsymbol{\omega}^n$ 为任意的使$\{\boldsymbol{\omega}^i\}_n$ 为线性无关组的向量，同时令 $\boldsymbol{\varphi}_{p+1}=\cdots=\boldsymbol{\varphi}_n=\mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{\varphi}_i(i=1,2,\cdots,n)$可以由$\{\boldsymbol{\omega}^i\}_n$ 这组基底表示：

$$\boldsymbol{\varphi}_i=\alpha_{ij}\boldsymbol{\omega}^j\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

并且当 $i>p$ 时，$\alpha_{ij}=0$（零向量表示的唯一性）. 下面只要证明 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$.

由假设

$$\boldsymbol{\omega}^i\wedge\boldsymbol{\varphi}_i=\alpha_{ij}\boldsymbol{\omega}^i\wedge\boldsymbol{\omega}^j=\mathbf{0}\quad(\text{对 } i=1,2,\cdots,p \text{ 不求和}),$$

由此推出

$$\sum_{j>i} \frac{1}{2}(\alpha_{ij} - \alpha_{ji})\boldsymbol{\omega}^i \wedge \boldsymbol{\omega}^j = \mathbf{0} \quad (\text{对 } i = 1,2,\cdots,p \text{ 不求和}),$$

再由唯一性可知 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} (i,j=1,2,\cdots,p)$.

又由于 $\alpha_{ij} = 0 (i > p)$,故有 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = 0\ (j > p)$. ▌

这一定理是由"三维欧氏空间中,当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ 时,$\boldsymbol{a}$ 可以由 $\boldsymbol{b}$ 表出"这一事实加以推广得到的. 下面的定理则将这一结论进一步推广到了外形式的情形.

定理 1.4 令 $\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2,\cdots,\boldsymbol{\omega}^p$ 为 $\mathscr{L}^n$ 中的 p 个线性无关的向量,φ_i 为 $\mathscr{L}^n$ 中的 p 次外形式,则外形式 $\boldsymbol{\Omega}$ 满足

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}^1 \wedge \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\omega}^2 \wedge \boldsymbol{\varphi}_2 + \cdots + \boldsymbol{\omega}^p \wedge \boldsymbol{\varphi}_p \qquad (1.5.19)$$

的充分必要条件是

$$\boldsymbol{\omega}^1 \wedge \boldsymbol{\omega}^2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\omega}^p \wedge \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}. \qquad (1.5.20)$$

证明 必要性显然,下面证明充分性.

将 $\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2,\cdots,\boldsymbol{\omega}^p$ 扩充为 $\mathscr{L}^n$ 中的一组基底 $\{\boldsymbol{\omega}^i\}(i=1,2,\cdots,n)$. 在这组基底下考虑 $\boldsymbol{\Omega}$ 的展开式:

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i_1<\cdots<i_r} a_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{\omega}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\omega}^{i_r}. \qquad (1.5.21)$$

用 $\boldsymbol{\omega}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\omega}^p$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 作外积,由于向量外积的反交换律,(1.5.21)式的每一项 $a_{i_1\cdots i_r}\boldsymbol{\omega}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\omega}^{i_r}$ 中至少应有一个 $\boldsymbol{\omega}^i (i=1,2,\cdots,p)$ 才能使(1.5.20)式成立,而这一点恰好就是(1.5.19)式成立的条件. ▌

当 $p=1$,且 $\boldsymbol{\omega}^1\neq\mathbf{0}$ 时,根据定理 1.4,由 $\boldsymbol{\omega}^1\wedge\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{0}$ 可以推出:存在外形式 $\boldsymbol{\varphi}_1$,使得 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\omega}^1\wedge\boldsymbol{\varphi}_1$. 这相当于在外积运算中定义了除法.

三、Hodge 星算子

前面我们提到了外形式空间 $\mathscr{L}^n_{[p]}$ 的维数为 C_n^p,由于 $C_n^p = C_n^{n-p}$,因而空间 $\mathscr{L}^n_{[p]}$ 与 $\mathscr{L}^n_{[n-p]}$ 具有相同的维数. 对于欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的外形式,这里我们来定义这两个外形式空间之间的一个映射,它

将 $\mathscr{L}^n_{[p]}$ 中的一个元素映射到 $\mathscr{L}^n_{[n-p]}$ 中的一个元素.

定义 1.11 欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的**对偶映射**

$$*:\mathscr{L}^n_{[p]}\to\mathscr{L}^n_{[n-p]},\quad \boldsymbol{\varphi}\mapsto *\boldsymbol{\varphi},\quad 0\leqslant p\leqslant n$$

由下面的式子定义:

$$(*\boldsymbol{\varphi})_{i_{p+1}\cdots i_n}=\frac{1}{p!}\sqrt{|g|}\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n}\varphi^{i_1\cdots i_p},\tag{1.5.22}$$

式中 $g=\det(g_{ij})$,且

$$\varphi^{i_1\cdots i_p}=g^{i_1j_1}\cdots g^{i_pj_p}\varphi_{j_1\cdots j_p}\tag{1.5.23}$$

为欧氏空间中的升指标运算.

映射 $*$ 称为 **Hodge**[①] **星算子**. 这个算子具有下面的一些**性质**:

(1) $*(\lambda\boldsymbol{\varphi}+\boldsymbol{\psi})=\lambda(*\boldsymbol{\varphi})+*\boldsymbol{\psi}$; (线性性)

(2) $*(*\boldsymbol{\varphi})=(-1)^{p(n-p)}\boldsymbol{\varphi}$. (对偶性)

第一条性质是很直观的,而第二条性质则需要进行一些运算才能得出:在欧氏空间中,$*\boldsymbol{\varphi}$ 的逆变分量为

$$\begin{aligned}(*\boldsymbol{\varphi})^{i_{p+1}\cdots i_n}&=g^{i_{p+1}j_{p+1}}\cdots g^{i_nj_n}(*\boldsymbol{\varphi})_{j_{p+1}\cdots j_n}\\
&=\frac{\sqrt{|g|}}{p!}\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n}\varphi^{j_1\cdots j_p}g^{i_{p+1}j_{p+1}}\cdots g^{i_nj_n}\\
&=\frac{\sqrt{|g|}}{p!}\delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n}g^{j_1k_1}\cdots g^{j_pk_p}g^{j_{p+1}i_{p+1}}\cdots g^{j_ni_n}\varphi_{k_1\cdots k_p}\\
&=\frac{\sqrt{|g|}}{p!}\begin{vmatrix}g^{1k_1}&\cdots&g^{1k_p}&g^{1i_{p+1}}&\cdots&g^{1i_n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ g^{nk_1}&\cdots&g^{nk_p}&g^{ni_{p+1}}&\cdots&g^{ni_n}\end{vmatrix}\varphi_{k_1\cdots k_p}\\
&=\frac{\sqrt{|g|}}{p!}\delta^{k_1\cdots k_pi_{p+1}\cdots i_n}_{1\cdots n}\det(g^{ij})\varphi_{k_1\cdots k_p},\end{aligned}$$

即

$$(*\boldsymbol{\varphi})^{i_{p+1}\cdots i_n}=\frac{\sqrt{|g|}}{g\cdot p!}\delta^{k_1\cdots k_pi_{p+1}\cdots i_n}_{1\cdots n}\varphi_{k_1\cdots k_p},\tag{1.5.24}$$

---

① W. V. D. Hodge(1903—1975),英国数学家.

因而，我们有

$$
\begin{aligned}
(*(*\boldsymbol{\varphi}))_{i_1\cdots i_p} &= \frac{\sqrt{|g|}}{(n-p)!}\delta^{1\cdots n}_{i_{p+1}\cdots i_n i_1\cdots i_p}(*\boldsymbol{\varphi})^{i_{p+1}\cdots i_n} \\
&= \frac{\operatorname{sgn}(g)}{p!(n-p)!}\delta^{1\cdots n}_{i_{p+1}\cdots i_n i_1\cdots i_p}\delta^{k_1\cdots k_p i_{p+1}\cdots i_n}_{1\cdots n}\varphi_{k_1\cdots k_p} \\
&= (-1)^{p(n-p)}\frac{\operatorname{sgn}(g)}{p!(n-p)!}\delta^{i_{p+1}\cdots i_n k_1\cdots k_p}_{i_{p+1}\cdots i_n i_1\cdots i_p}\varphi_{k_1\cdots k_p} \\
&= (-1)^{p(n-p)}\frac{\operatorname{sgn}(g)}{p!}\delta^{k_1\cdots k_p}_{i_1\cdots i_p}\varphi_{k_1\cdots k_p}.
\end{aligned}
$$

最后，我们得到

$$
(*(*\boldsymbol{\varphi}))_{i_1\cdots i_p} = (-1)^{p(n-p)}\operatorname{sgn}(g)\varphi_{i_1\cdots i_p}. \qquad (1.5.25)
$$

当外形式是定义在欧氏空间时，$\operatorname{sgn}(g)>0$，因而性质 2 得到了验证.

定义了 Hodge 星算子以后，通常三维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 的叉乘运算与本节定义的外积运算有如下的关系：

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是 $\mathscr{E}^3$ 中向量，则

$$
\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = *(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}). \qquad (1.5.26)
$$

这个表达式与经典的叉乘定义是一致的. 另外，在 $\mathscr{E}^3$ 中，Hodge 星算子只有如下四种运算：

(1) $*f=f\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$；

(2) $*(x^i\boldsymbol{e}_i)=x^1\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3+x^2\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1+x^3\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2$；

(3) $*(\omega^{23}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3+\omega^{31}\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1+\omega^{12}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2)=\omega^{23}\boldsymbol{e}_1+\omega^{31}\boldsymbol{e}_2+\omega^{12}\boldsymbol{e}_3$；

(4) $*(f\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3)=f$，

其中 $f,x^1,x^2,x^3,\omega^{23},\omega^{31},\omega^{12}\in\mathbb{R}$. 这里性质(3)说明了 $\mathscr{E}^3$ 中的二阶反称化张量可以用一个向量来表示. 力学中这一点体现在角速度的引进. 在上述四种运算中假定$\{\boldsymbol{e}_i\}$是标准正交的.

最后，还有两个基本公式：

$$
*1=\sqrt{|g|}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^n = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}_n,
$$

$$
*(\sqrt{|g|}\boldsymbol{e}^1\wedge\boldsymbol{e}^2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^n) = 1.
$$

§1.6　几类特殊张量和它们的性质

一、二阶张量与特征值

在力学中最常见的张量就是所谓的欧氏空间中的二阶张量．考虑一个二阶张量 $\boldsymbol{T}=(T^i_j)$．对于任意的两个欧氏向量 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$，可以通过张量的标量积来定义一个二次型：

$$(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{T\eta}) = \xi^i g_{ij} T^j_k \eta^k, \tag{1.6.1}$$

这里 $\boldsymbol{T\eta}=T^i_j\eta^j\boldsymbol{e}_i$ 为张量 $\boldsymbol{T}$ 与向量 $\boldsymbol{\eta}$ 进行张量积后再对后一个逆变指标与协变指标的缩并．

我们说二阶张量(T^i_j)在具有度量系数 g_{ij} 的空间中是**对称的**，如果 $T_{ij}=T_{ji}$，这里 $T_{ij}=g_{ik}T^k_j$是 T^i_j的降指标运算．同样若 $T_{ij}=-T_{ji}$，则(T^i_j)称为是**反称**的．下面的定理说明了张量的对称性与二次型的关系．

定理 1.5　将张量(T^i_j)看做是定义在度量系数为 g_{ij} 的欧氏空间或伪欧氏空间上的线性算子，则

(1) (T^i_j)是对称的，当且仅当

$$(\boldsymbol{T\xi},\boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{T\eta}); \tag{1.6.2}$$

(2) (T^i_j)是反称的，当且仅当

$$(\boldsymbol{T\xi},\boldsymbol{\eta}) = -(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{T\eta}). \tag{1.6.3}$$

定理 1.5 是易于证明的，由读者自行完成．

对应于张量(T^i_j)的二次型，可以如下定义其特征值：

$$T^i_j\xi^j = \lambda\xi^i, \tag{1.6.4}$$

λ 就是(T^i_j)的**特征值**；对于相应的协变张量(T_{ij})，其**特征值** λ 定义如下：

$$g^{ik}T_{kj}\xi^j = \lambda\xi^i. \tag{1.6.5}$$

而多项式 $\det(T^i_j-\lambda\delta^i_j)$和 $\det(T_{ij}-\lambda g_{ij})$称为相应的**特征多项式**．

另外，$T^i_i=g^{ik}T_{ki}$称为张量 $\boldsymbol{T}$ 的**迹**，它在坐标变换下是一个不

变的量. 同样矩阵(T^i_j)的行列式 $\det(T^i_j)$也是不变量.

通常在连续介质力学中一点的应力张量及应变张量都是三维空间中的二阶张量的例子. 刚体力学中的角速度矢量实际上是一个反称的二阶张量:

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix}0 & \omega_3 & -\omega_2\\ -\omega_3 & 0 & \omega_1\\ \omega_2 & -\omega_1 & 0\end{pmatrix}.$$

二、Levi-Civita 符号

Levi-Civita 符号是一类特殊的广义 Kronecker 符号,它服从张量的变换规律. 其定义如下:

定义 1.12 Levi-Civita 符号定义为

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\varepsilon^{i_1\cdots i_n}=\begin{cases}1, & i_1\cdots i_n \text{ 是 } 1\cdots n \text{ 的偶排列},\\ -1, & i_1\cdots i_n \text{ 是 } 1\cdots n \text{ 的奇排列},\\ 0, & \text{其他情形}.\end{cases}$$

由定义可以看出:

$$\begin{cases}\varepsilon_{i_1\cdots i_n}=\delta^{1\cdots n}_{i_1\cdots i_n},\\ \varepsilon^{i_1\cdots i_n}=\delta^{i_1\cdots i_n}_{1\cdots n}.\end{cases}\tag{1.6.6}$$

下面来讨论一下 $\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$,$\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$ 与 Kronecker 符号 δ^i_j 的关系. 对于$\mathscr{L}^n_{[2]}$中的 Levi-Civita 符号,有

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon^{kl}=\delta^k_i\delta^l_j-\delta^k_j\delta^l_i=\delta^{kl}_{ij};$$

对于一般 $\mathscr{L}^n_{[n]}$ 中的 Levi-Civita 符号,有

$$\begin{aligned}\delta^{i_1\cdots i_n}_{j_1\cdots j_n}&=\varepsilon^{i_1\cdots i_n}\varepsilon_{j_1\cdots j_n}=n!\,\delta^{i_1}_{[j_1}\delta^{i_2}_{j_2}\cdots\delta^{i_n}_{j_n]}\\ &=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\delta^{i_1}_{\sigma(j_1)}\delta^{i_2}_{\sigma(j_2)}\cdots\delta^{i_n}_{\sigma(j_n)}=\det(\delta^{i_k}_{j_k})_n.\end{aligned}\tag{1.6.7}$$

上式在三维情形就是

$$\varepsilon^{i_1i_2i_3}\varepsilon_{j_1j_2j_3}=\begin{vmatrix}\delta^{i_1}_{j_1} & \delta^{i_1}_{j_2} & \delta^{i_1}_{j_3}\\ \delta^{i_2}_{j_1} & \delta^{i_2}_{j_2} & \delta^{i_2}_{j_3}\\ \delta^{i_3}_{j_1} & \delta^{i_3}_{j_2} & \delta^{i_3}_{j_3}\end{vmatrix}.$$

对第三组分量缩并，得

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i}\varepsilon_{j_1 j_2 i} = \delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2} - \delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1} = \delta^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}.$$

一般地，我们有

$$\delta^{i_1 \cdots i_p i_{p+1} \cdots i_q}_{j_1 \cdots j_p i_{p+1} \cdots i_q} = \frac{(n-p)!}{(n-q)!}\delta^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_p}. \tag{1.6.8}$$

这一条性质请读者自行证明.

附带说明，有的书上也称 Levi-Civita 符号为 **Ricci 符号**.

习　题　一

1. 试证 $\det(g_{ij}) \neq 0$.

2. 求坐标变换下 g_{ij} 和 g^{ij} 的变换规律.

3. 在三维欧氏空间中给定基底 $\{e_i\}$，用通常向量运算方式给出其对偶基底.

4. 在伪欧氏空间 $\mathscr{E}^3_{1,2}$ 中，设度量系数矩阵 $\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$. 若定义其中两个向量 $\boldsymbol{\xi} = (\xi^0, \xi^1, \xi^2)$ 与 $\boldsymbol{\eta} = (\eta^0, \eta^1, \eta^2)$ 的叉乘为

$$\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta} = (\xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1, \xi^0\eta^2 - \xi^2\eta^0, \xi^1\eta^0 - \xi^0\eta^1),$$

试证明：

(1) 对于基底 $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$，有

$$\boldsymbol{e}_0 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_0 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_0;$$

(2) 对于 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3 \in \mathscr{E}^3_{1,2}$，有 Jacobi 恒等式成立：

$$\boldsymbol{\xi}_1 \times (\boldsymbol{\xi}_2 \times \boldsymbol{\xi}_3) + \boldsymbol{\xi}_3 \times (\boldsymbol{\xi}_1 \times \boldsymbol{\xi}_2) + \boldsymbol{\xi}_2 \times (\boldsymbol{\xi}_3 \times \boldsymbol{\xi}_1) = \boldsymbol{0};$$

(3) 上述结论对 Lorentz 变换保持不变.

5. 证明：$\delta^{i_1 \cdots i_p i_{p+1} \cdots i_{p+q}}_{j_1 \cdots j_p i_{p+1} \cdots i_{p+q}} = \dfrac{(n-p)!}{(n-p-q)!}\delta^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_p}$.

6. 证明 Hodge 星算子的下列性质：

(1) $(*\boldsymbol{\varphi}) \cdot (*\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi}$;

(2) $\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} = *(\boldsymbol{\varphi} \wedge (*\boldsymbol{\psi}))$.

第二章　欧氏空间中的曲纹坐标

§2.1　曲纹坐标与活动标架

一、曲纹坐标

定义 2.1(欧氏空间中的笛卡儿坐标)　对于 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的一个点，给定实数组 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 与之对应，满足：

(1) 不同的点对应于不同的数组，即当且仅当 $x^i = y^i\,(i=1, 2, \cdots, n)$ 时，$P(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 与 $Q(y^1, y^2, \cdots, y^n)$ 是同一点；

(2) 任意数组 $(x^1, \cdots, x^n)$ 代表空间一个点.

这样给定的数组称为欧氏空间的**笛卡儿坐标**.

定义 2.2(欧氏空间中的曲纹坐标)　设在 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的区域 $\mathscr{D}$ 上给定了 n 个实光滑函数(至少三阶以上连续可微)：

$$x^i = x^i(y^1, \cdots, y^n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{2.1.1}$$

其中 $(y^1, \cdots, y^n)$ 是 $\mathscr{D}$ 上点的笛卡儿坐标. 如果(2.1.1)式的 Jacobi 行列式满足

$$J = \frac{\partial(x^1, \cdots, x^n)}{\partial(y^1, \cdots, y^n)} \neq 0, \tag{2.1.2}$$

则 $(x^1, \cdots, x^n)$ 与 $(y^1, \cdots, y^n)$ 之间是一一对应，即存在反函数

$$y^i = y^i(x^1, \cdots, x^n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{2.1.3}$$

于是参数 $(x^1, \cdots, x^n)$ 与 $(y^1, \cdots, y^n)$ 一样，也确定了 $\mathscr{D}$ 上的点，所以参数 $(x^1, \cdots, x^n)$ 也是 $\mathscr{D}$ 上的坐标. 由于当 x^i 变动而 $x^j\,(j=1, 2, \cdots, n, j\neq i)$ 固定时，数组 $(x^1, \cdots, x^n)$ 在 $\mathscr{D}$ 内描绘出一族曲线，而不同的 x^i 变动时一共描绘出 n 族曲线，形成了 $\mathscr{D}$ 内的曲线网，所以

参数$(x^1,\cdots,x^n)$也称为**曲纹坐标**或**曲线坐标**.

例如，通常在物理学和力学中采用如下两种曲纹坐标：

(1) 柱坐标：

$$\begin{cases} y^1 = r\cos\varphi, \\ y^2 = r\sin\varphi, \\ y^3 = z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} r \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \end{pmatrix}, \tag{2.1.4}$$

这里(y^1,y^2,y^3)是点的笛卡儿坐标，(r,φ,z)是我们定义的参数，相当于定义 2.2 中的(x^1,x^2,x^3)，Jacobi 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

当$r>0, 0\leqslant\varphi<2\pi$时，上式不为零.

(2) 球坐标：

$$\begin{cases} y^1 = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y^2 = r\sin\varphi\sin\theta, \\ y^3 = r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{bmatrix} r \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{bmatrix}, \tag{2.1.5}$$

这里的 Jacobi 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

当$r>0, 0<\theta<\pi$时，$J\neq 0$.

二、活动标架

在给定了曲纹坐标(2.1.1)后的n维欧氏空间的区域$\mathscr{D}$内的每一点，沿每一族曲线均有一个切向量：

$$\boldsymbol{e}_i = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}, \frac{\partial y^2}{\partial x^i}, \cdots, \frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right) \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{2.1.6}$$

由(2.1.2)式可知这组向量是线性无关的，并且显然是n维欧氏空间中的极大线性无关组，因而可以将它作为欧氏空间的一组基底.

显然，这组基底是和 $\mathscr{D}$ 内的点有关的，即在不同的点上基底不同. 我们称这种基底为**活动标架**，意即随点的不同而变动的标架. 有时也称之为**自然坐标**，这是由于一旦引进了曲线坐标，便由之确定了它相应的活动标架.

既然在一般情形下 $\mathscr{D}$ 内的每一点给定了一个活动标架，所以我们实际上给出了区域 $\mathscr{D}$ 上的一个标架场.

场概念的引进是物理学和力学中的一次认识上的飞跃. 对于重力的认识就充分体现了这一点. 人们最初对重力的理解是：认为物体受重力作用是在物体上作用有一个力，一旦离开了物体所在的地方这个力也就不存在了，而且这个力还必然有一个施力者（就是地球）. 随着认识的进一步深入，人们逐渐认识到物体不管在什么地方都受到重力的作用，因而重力的存在并不依赖于受力物体的存在与否，这就将重力的作用看做是空间中的场，即所谓的引力场. 再进一步的抽象就产生了标量场、向量场、张量场等等. 同时由于曲纹坐标的引入，自然而然又引入了标架场的概念. 引入了张量场与标架场以后，每一点的张量均可在该点的标架上分解：

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}) = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{e}_{i_1}(\boldsymbol{p})\cdots\boldsymbol{e}_{i_p}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{e}^{j_1}(\boldsymbol{p})\cdots\boldsymbol{e}^{j_q}(\boldsymbol{p}), \tag{2.1.7}$$

式中 $\boldsymbol{p}$ 为空间中的点，$\{\boldsymbol{e}^i\}$是欧氏空间中点 $\boldsymbol{p}$ 处的对偶基底.

既然欧氏空间中的活动标架与点有关，则活动标架所决定的度量系数也是点的函数：

$$g_{ij}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{p}). \tag{2.1.8}$$

由上一章的结论，$\boldsymbol{e}_i$ 的对偶基底为

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{p}) = g^{ij}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{p}), \tag{2.1.9}$$

其中

$$g^{ij}(\boldsymbol{p})g_{jk}(\boldsymbol{p}) = \delta^i_k. \tag{2.1.10}$$

接下来我们讨论空间在给定不同的曲纹坐标时标架场的变换关系. 给定两组曲纹坐标$\{x^i\}$与$\{\tilde{x}^{i'}\}$如下：

$$x^i = x^i(y^1,\cdots,y^n) \quad 与 \quad \tilde{x}^{i'} = \tilde{x}^{i'}(y^1,\cdots,y^n),$$

则其相应的活动标架$\{e_i\}$与$\{\tilde{e}_{i'}\}$为

$$e_i=\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i},\cdots,\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)\quad 与\quad \tilde{e}_{i'}=\left(\frac{\partial y^1}{\partial \tilde{x}^{i'}},\cdots,\frac{\partial y^n}{\partial \tilde{x}^{i'}}\right).$$

由复合函数微商的链式法则，有

$$\tilde{e}_{i'}=\left(\frac{\partial y^1}{\partial \tilde{x}^{i'}},\cdots,\frac{\partial y^n}{\partial \tilde{x}^{i'}}\right)=\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}},\cdots,\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}}\right)=e_i\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}}.$$

也就是说，若令$e=(e_1,\cdots,e_n)^{\mathrm{T}}$，$\tilde{e}=(\tilde{e}_{1'},\cdots,\tilde{e}_{n'})^{\mathrm{T}}$都是形式的列向量，则有

$$\tilde{e}=Ae, \tag{2.1.11}$$

式中$A=\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{j'}}\right)$是$n\times n$阶矩阵函数.

三、活动标架的微商

由于标架场是点的函数，因而相邻的两点上的标架就有变化. 下面我们来讨论标架随点的变化规律.

给定空间一点p，记其笛卡儿坐标为$r=(y^1,\cdots,y^n)$. 设p点变化时，得到相邻的一点$r+\mathrm{d}r$，其中改变量$\mathrm{d}r$在曲纹坐标$(x^1,\cdots,x^n)$中的表示为

$$\mathrm{d}r=(\mathrm{d}y^1,\cdots,\mathrm{d}y^n)=\left(\frac{\partial y^1}{\partial x^i},\cdots,\frac{\partial y^n}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i=e_i\mathrm{d}x^i, \tag{2.1.12}$$

而标架$\{e_i\}$也可以记为

$$e_i=\frac{\partial r}{\partial x^i}. \tag{2.1.13}$$

由于曲纹坐标的标架本身不像笛卡儿坐标的标架，它在空间不同点是不同的. 我们来讨论标架本身的微商. 一般地，标架$\{e_i\}$的微分可表示为

$$\mathrm{d}e_i=\frac{\partial e_i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \tag{2.1.14}$$

显然，只要讨论清楚了$\frac{\partial e_i}{\partial x^j}$，则标架的微分以及任意向量场的

微分也就全清楚了. 注意到$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}$仍然是欧氏空间中的向量,因而它在标架场中可沿原基底分解为

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}=\Gamma_{ij}^k \boldsymbol{e}_k=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\right), \tag{2.1.15}$$

其中 Γ_{ij}^k为实函数. 利用偏导数的可交换性,即$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\right)$,有

$$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k. \tag{2.1.16}$$

由(2.1.15)式与原基底作内积,得

$$\begin{cases}\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}\cdot \boldsymbol{e}_l=\Gamma_{ij}^k \boldsymbol{e}_k\cdot \boldsymbol{e}_l=\Gamma_{ij}^k g_{kl}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{e}_l}{\partial x^j}\cdot \boldsymbol{e}_i=\Gamma_{lj}^k g_{ki},\end{cases}$$

两式相加,可得

$$\frac{\partial(\boldsymbol{e}_i\cdot \boldsymbol{e}_l)}{\partial x^j}=\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}=\Gamma_{ij}^k g_{kl}+\Gamma_{lj}^k g_{ki}.$$

对上式中 i,j,l 三个指标轮换,得到另外两式:

$$\begin{cases}\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}=\Gamma_{ji}^k g_{kl}+\Gamma_{li}^k g_{kj}, \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}=\Gamma_{il}^k g_{kj}+\Gamma_{jl}^k g_{ki}.\end{cases}$$

将上面三式中前两式相加,减去第三式,并利用Γ_{ij}^k的对称性(2.1.16)式,我们有

$$\Gamma_{ij}^k g_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\xlongequal{\text{记为}}\Gamma_{l,ij}. \tag{2.1.17}$$

这里 $\Gamma_{l,ij}$ 称为**第一类 Christoffel**[1] **符号**,而 Γ_{ij}^k则称为**第二类 Christoffel 符号**. 由上式可得

---

① E. B. Christoffel(1829—1900),德国数学家.

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}}\right). \tag{2.1.18}$$

另外，从(2.1.17)式还可得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}=\Gamma_{i,jk}+\Gamma_{j,ik}. \tag{2.1.19}$$

下面我们来讨论第二类 Christoffel 符号在坐标变换下的变换规律. 设有两组曲纹坐标 $x^{i}=x^{i}(y^{1},\cdots,y^{n})$ 及 $\tilde{x}^{i'}=\tilde{x}^{i'}(y^{1},\cdots,y^{n})$，其相应的标架分别为 $\boldsymbol{e}_{i}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{e}}_{i'}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{x}^{i'}}$. 两组标架之间的转换关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{i}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{i}}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{x}^{j'}}\dfrac{\partial \tilde{x}^{j'}}{\partial x^{i}}=\beta_{i}^{j'}\tilde{\boldsymbol{e}}_{j'},\\ \tilde{\boldsymbol{e}}_{i'}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{x}^{i'}}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^{j}}\dfrac{\partial x^{j}}{\partial \tilde{x}^{i'}}=\alpha_{i'}^{j}\boldsymbol{e}_{j},\end{cases} \tag{2.1.20}$$

其中 $\beta_{i}^{k'}\alpha_{k'}^{j}=\delta_{i}^{j}$. 由(2.1.14)与(2.1.15)两式知

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{i}=\Gamma_{ij}^{k}\mathrm{d}x^{j}\boldsymbol{e}_{k},$$

而由(2.1.20)式的第一式，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{i}&=\mathrm{d}(\beta_{i}^{j'}\tilde{\boldsymbol{e}}_{j'})=\mathrm{d}(\beta_{i}^{j'})\tilde{\boldsymbol{e}}_{j'}+\beta_{i}^{j'}\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{e}}_{j'}\\ &=(\mathrm{d}\beta_{i}^{k'}+\beta_{i}^{j'}\tilde{\Gamma}_{j'l'}^{k'}\mathrm{d}\tilde{x}^{l'})\tilde{\boldsymbol{e}}_{k'}\\ &=\left(\frac{\partial \beta_{i}^{k'}}{\partial x^{j}}\mathrm{d}x^{j}+\beta_{i}^{j'}\tilde{\Gamma}_{j'l'}^{k'}\beta_{p}^{l'}\mathrm{d}x^{p}\right)\alpha_{k'}^{q}\boldsymbol{e}_{q}\\ &=\left(\alpha_{l'}^{k}\frac{\partial \beta_{i}^{l'}}{\partial x^{j}}+\beta_{i}^{p'}\beta_{j}^{q'}\alpha_{l'}^{k}\tilde{\Gamma}_{p'q'}^{l'}\right)\mathrm{d}x^{j}\boldsymbol{e}_{k}.\end{aligned}$$

比较以上两式，有

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^{k}&=\alpha_{l'}^{k}\frac{\partial \beta_{i}^{l'}}{\partial x^{j}}+\beta_{i}^{p'}\beta_{j}^{q'}\alpha_{l'}^{k}\tilde{\Gamma}_{p'q'}^{l'}\\ &=\frac{\partial x^{k}}{\partial \tilde{x}^{l'}}\frac{\partial^{2}\tilde{x}^{l'}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}+\frac{\partial \tilde{x}^{p'}}{\partial x^{i}}\frac{\partial \tilde{x}^{q'}}{\partial x^{j}}\frac{\partial x^{k}}{\partial \tilde{x}^{l'}}\tilde{\Gamma}_{p'q'}^{l'}.\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

(2.1.21)式表明，当坐标变换时，Γ_{ij}^{k} 不再遵从张量的变换规则，而多出了一项 $\frac{\partial x^{k}}{\partial \tilde{x}^{l'}}\frac{\partial^{2}\tilde{x}^{l'}}{\partial x^{i}\partial x^{j}}$，因而 (Γ_{ij}^{k}) 不是张量. Γ_{ij}^{k} 也称为空间

的**联络系数**，正如 g_{ij} 刻画了空间的度量性质一样，它刻画了空间的微商性质.

(2.1.18)式给出了联络系数与度量系数之间的关系. 满足这样关系的空间之联络称为 **Riemann 联络**. 一般地，空间中如果给定了一个任意的联络系数 Γ_{ij}^{k}，只要它在坐标转换下的变换规律是(2.1.21)式，则在空间中就可以进行微分运算. 这样的空间称为**联络空间**. 由(2.1.18)式知 Riemann 联络的联络系数是下标对称的，即 $\Gamma_{ij}^{k}=\Gamma_{ji}^{k}$，称这种联络为**对称联络**. 由于在一般的联络空间中并不一定能给出空间的度量系数，即不能给出空间的度量性质，因而通常联络空间不是度量空间.

同样，如果对某空间给定其度量系数 g_{ij}，这组数在坐标变换下满足张量的变换规律，并且其相应的二次型是对称正定的，则这样的空间称为 **Riemann 空间**. 若 g_{ij} 是对称、非退化、不定的，则构成一个**伪Riemann 空间**. 由上面的讨论可知，(伪)Riemann 空间一定是联络空间，并且具有对称的联络.

(伪)Riemann 空间和通常的(伪)欧氏空间的区别在于：在(伪)欧氏空间中存在一个全空间的坐标变换，使得在新的坐标基底下度量系数的矩阵为对角元素是 1(或 −1)的对角矩阵，而对于一般的(伪)Riemann 空间只能在某个局部区域中做到这一点，但在全空间中是找不到这样的一个统一的变换的.

§2.2 绝对微商

一、协变导数

上一节中讨论了曲纹坐标及其标架的微分，并讨论了随之引进的空间的联络系数及其在坐标变换下的变换规律. 这里我们来考虑空间中向量场的协变导数，也就是空间中向量场的微分结构.

对于给定了曲纹坐标 $x^i(i=1,2,\cdots,n)$ 的欧氏空间 $\mathscr{E}^n$，给定一

个向量场 $\boldsymbol{v}$，它在标架场中的分解形式为

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i. \tag{2.2.1}$$

由于给定的向量场 $\boldsymbol{v}$ 是空间 $\mathscr{E}^n$ 中点的函数，我们考虑其微分：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = v^i \mathrm{d}\boldsymbol{e}_i + (\mathrm{d}v^i)\boldsymbol{e}_i. \tag{2.2.2}$$

由上一节中关于标架的微分(2.1.15)式，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = (\mathrm{d}v^i + \Gamma^i_{jk} v^j \mathrm{d}x^k)\boldsymbol{e}_i, \tag{2.2.3}$$

即 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 在标架场的坐标为

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{v})^i = \mathrm{d}v^i + \Gamma^i_{jk} v^j \mathrm{d}x^k. \tag{2.2.4}$$

(2.2.4)式说明，一般地 $(\mathrm{d}\boldsymbol{v})^i \neq \mathrm{d}v^i$. $\mathrm{d}v^i$ 称为向量的**相对微分**，即分量的微分；而 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ 称为向量的**绝对微分**. 它们的差别 $\Gamma^i_{jk} v^j \mathrm{d}x^k$ 表示活动标架本身的转动或者伸缩的效应. 当这一项为零时，就说明标架没有变化，绝对微分与相对微分就一样了.

由(2.2.3)式可以定义向量 $\boldsymbol{v}$ 的协变导数. 将(2.2.3)式中的 $\mathrm{d}v^i$ 用 $\mathrm{d}x^k$ 表示出来，得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} v^j\right)\mathrm{d}x^k \boldsymbol{e}_i,$$

其中系数 $\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} v^j$ 就称为向量场 $\boldsymbol{v}$ 的**协变导数**，记做 $\mathrm{d}_k v^i$，$\nabla_k v^i$ 或 $v^i_{;k}$，即

$$\mathrm{d}_k v^i = \nabla_k v^i = v^i_{;k} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} v^j. \tag{2.2.5}$$

向量 $\boldsymbol{v}$ 的协变导数 $\nabla_k v^i$ 是一个二阶张量，对指标 i 服从逆变规律，对指标 k 服从协变规律. 关于这一点只要考虑在两组标架场 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 和 $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_{i'}\}$ 下的变换规律：

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = \tilde{v}^{i'} \tilde{\boldsymbol{e}}_{i'}.$$

由坐标转换规律得

$$v^i = \alpha^i_{j'} \tilde{v}^{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{j'}} \tilde{v}^{j'},$$

因此，有

$$\nabla_k v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} v^j = \frac{\partial(\alpha^i_{j'} \tilde{v}^{j'})}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} \tilde{v}^{l'} \alpha^j_{l'}$$

$$= \alpha^i_{j'} \beta^{l'}_k \frac{\partial \tilde{v}^{j'}}{\partial \tilde{x}^{l'}} + \tilde{v}^{j'} \frac{\partial \alpha^i_{j'}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} \tilde{v}^{l'} \alpha^j_{l'}.$$

利用联络系数 Γ^k_{ij} 的坐标变换关系(2.1.21)式，得

$$\nabla_k v^i = \alpha^i_{j'} \beta^{l'}_k \frac{\partial \tilde{v}^{j'}}{\partial \tilde{x}^{l'}} + \tilde{v}^{j'} \frac{\partial \alpha^i_{j'}}{\partial x^k} + \alpha^i_{p'} \frac{\partial \beta^{p'}_j}{\partial x^k} \alpha^j_{l'} \tilde{v}^{l'} + \beta^{p'}_j \beta^{q'}_k \alpha^i_{r'} \tilde{\Gamma}^{r'}_{p'q'} \alpha^j_{l'} \tilde{v}^{l'}$$

$$= \alpha^i_{j'} \beta^{l'}_k \left(\frac{\partial \tilde{v}^{j'}}{\partial \tilde{x}^{l'}} + \tilde{\Gamma}^{j'}_{p'l'} \tilde{v}^{p'} \right) + \tilde{v}^{j'} \left(\frac{\partial \alpha^i_{j'}}{\partial x^k} + \alpha^i_{p'} \alpha^l_{j'} \frac{\partial \beta^{p'}_l}{\partial x^k} \right),$$

其中后一括号内为零. 事实上,

$$\alpha^i_{p'} \alpha^l_{j'} \frac{\partial \beta^{p'}_l}{\partial x^k} = \alpha^i_{p'} \alpha^l_{j'} \frac{\partial \beta^{p'}_k}{\partial x^l} = \alpha^i_{p'} \frac{\partial \beta^{p'}_k}{\partial \tilde{x}^{j'}} = -\beta^{p'}_k \frac{\partial \alpha^i_{p'}}{\partial \tilde{x}^{j'}} = -\beta^{p'}_k \frac{\partial \alpha^i_{j'}}{\partial \tilde{x}^{p'}} = -\frac{\partial \alpha^i_{j'}}{\partial x^k},$$

这里我们用到了复合函数微商的链式法则和二阶偏导数的可交换性. 因此，我们有

$$\nabla_k v^i = \alpha^i_{j'} \beta^{l'}_k \tilde{\nabla}_{l'} \tilde{v}^{j'}. \tag{2.2.6}$$

这说明向量的协变导数在坐标变换下满足张量的变换规律.

若向量场是常向量，则有

$$\nabla_k v^i = 0; \tag{2.2.7}$$

反之，若上式成立，则向量场为常向量场. 所以(2.2.7)式是向量场为常向量场的充分必要条件. 由(2.2.6)式可以看出这一性质与活动标架的选取是无关的. (2.2.7)式也可以写为

$$\mathrm{d}v^i + \Gamma^i_{jk} v^j \mathrm{d}x^k = 0. \tag{2.2.8}$$

如果考虑 $\boldsymbol{v}$ 是定义在某一条由参数 t 所确定的曲线 $x^i = x^i(t)$ 上的向量，则有

$$\dot{v}^i + \dot{x}^k v^j \Gamma^i_{jk} = 0,$$

其中 $\dot{v}^i = \dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}$. 若所考虑的 $\boldsymbol{v} = \dot{x}^i \boldsymbol{e}_i$，则得到空间的测地线(geodesics) $x^i = x^i(t)$ 满足的方程

$$\ddot{x}^i + \dot{x}^j \dot{x}^k \Gamma^i_{jk} = 0. \tag{2.2.9}$$

通过向量的协变导数还可以定义它的方向导数. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是空间

中的向量场，则向量场 $\boldsymbol{v}$ 沿方向 $\boldsymbol{\xi}$ 的**方向导数**定义为

$$\nabla_{\xi}\boldsymbol{v} = \xi^k \nabla_k \boldsymbol{v}. \qquad (2.2.10)$$

由(2.2.10)式可以看出，所谓空间的测地线就是其切向量 $\boldsymbol{T}=\dot{x}^i\boldsymbol{e}_i$ 沿自身的方向导数为零的曲线：

$$\nabla_T \boldsymbol{T} = 0. \qquad (2.2.11)$$

一方面，从力学的角度来看，测地线就是约束在空间中的质点做惯性运动时的轨迹. 而另一方面，给定的空间力场也可以看做是一种给定的空间中的联络，它使得空间的测地线(即短程线)改变了.

二、逆变导数

前面对空间中的向量定义了协变导数，而这里所讨论的逆变导数是针对其对偶空间中的向量而定义的.

令 $\boldsymbol{v}$ 是空间 $\mathscr{E}^n$ 中的某一常向量，由(2.2.8)式知它应满足

$$\mathrm{d}v^i = -\Gamma^i_{jk} v^j \mathrm{d}x^k. \qquad (2.2.12)$$

考虑其对偶空间 $\mathscr{E}^{n*}$ 中的一个向量场 $\boldsymbol{u}=u_i\boldsymbol{e}^i$. 由对偶性质知道

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}) = u_i v^i.$$

上式的微分为

$$\mathrm{d}(u_i v^i) = \mathrm{d}[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v})] = (\mathrm{d}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}),$$

这里已经用到了 $\boldsymbol{v}$ 是常向量这一性质. 对上一等式的第一项应用微分法则，有

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}) = \mathrm{d}(u_i v^i) = u_i \mathrm{d}v^i + v^i \mathrm{d}u_i$$
$$= -u_i \Gamma^i_{jk} v^j \mathrm{d}x^k + v^i \mathrm{d}u_i = (\mathrm{d}u_i - u_j \Gamma^j_{ik} \mathrm{d}x^k) v^i.$$

由对偶的定义及向量场 $\boldsymbol{v}$ 的任意性，有

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{u})_i = \mathrm{d}u_i - \Gamma^j_{ik} u_j \mathrm{d}x^k. \qquad (2.2.13)$$

类似向量协变导数的定义，可以定义对偶空间中向量的**逆变导数**为

$$\nabla_k u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ik} u_j. \qquad (2.2.14)$$

同样，可以证明对偶向量的逆变导数也是一个二阶张量，服从逆变规律.

三、张量的绝对微商

有了前面所定义的向量的协变导数和逆变导数就可以来考虑一般张量的绝对微商.

给定一个(p,q)阶张量$\boldsymbol{T}=\left(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)$，任取$q$个常向量$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_q$和$p$个对偶空间中的常向量$\boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{u}^2,\cdots,\boldsymbol{u}^p$，由张量多重线性函数的定义，有

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_q,\boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{u}^2,\cdots,\boldsymbol{u}^p) = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}v^{j_1}_1\cdots v^{j_q}_q u^1_{i_1}\cdots u^p_{i_p}. \tag{2.2.15}$$

由于$\boldsymbol{u}^l(l=1,2,\cdots,p)$和$\boldsymbol{v}_l(l=1,2,\cdots,q)$均是常向量，因而$\mathrm{d}\boldsymbol{u}^l=\boldsymbol{0}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{v}_l=\boldsymbol{0}$，即有

$$\mathrm{d}u^l_i = u^l_j\Gamma^j_{ik}\mathrm{d}x^k \quad (l=1,2,\cdots,p),$$
$$\mathrm{d}v^i_l = -v^j_l\Gamma^i_{jk}\mathrm{d}x^k \quad (l=1,2,\cdots,q).$$

对(2.2.15)式进行微分，并考虑到$\boldsymbol{u}^l$和$\boldsymbol{v}_l$均是常向量，得

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_q,\boldsymbol{u}^1,\cdots,\boldsymbol{u}^p) &= \mathrm{d}\left(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}v^{j_1}_1\cdots v^{j_q}_q u^1_{i_1}\cdots u^p_{i_p}\right)\\
&=\left(\mathrm{d}T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)v^{j_1}_1\cdots v^{j_q}_q u^1_{i_1}\cdots u^p_{i_p} + T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\mathrm{d}\left(v^{j_1}_1\cdots v^{j_q}_q u^1_{i_1}\cdots u^p_{i_p}\right)\\
&=\left(\mathrm{d}T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)v^{j_1}_1\cdots v^{j_q}_q u^1_{i_1}\cdots u^p_{i_p}\\
&\quad + T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\left(v^{j_1}_1\cdots v^{j_q}_q\right)\left(u^1_j\Gamma^j_{i_1k}\mathrm{d}x^k\right)\left(u^2_{i_2}\cdots u^p_{i_p}\right)\\
&\quad + \cdots + T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\left(v^{j_1}_1\cdots v^{j_q}_q\right)\left(u^1_{i_1}\cdots u^{p-1}_{i_{p-1}}\right)\left(u^p_j\Gamma^j_{i_pk}\mathrm{d}x^k\right)\\
&\quad - T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\left(v^j_1\Gamma^{j_1}_{jk}\mathrm{d}x^k\right)\left(v^{j_2}_2\cdots v^{j_q}_q\right)\left(u^1_{i_1}\cdots u^p_{i_p}\right)\\
&\quad - \cdots - T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\left(v^{j_1}_1\cdots v^{j_{q-1}}_{q-1}\right)\left(v^j_q\Gamma^{j_q}_{jk}\mathrm{d}x^k\right)\left(u^1_{i_1}\cdots u^p_{i_p}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=\Big(&\mathrm{d}T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}+T^{ii_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\Gamma^{i_1}_{ik}\mathrm{d}x^k+\cdots+T^{i_1\cdots i_{p-1}i}_{j_1\cdots j_q}\Gamma^{i_p}_{ik}\mathrm{d}x^k\\
&-T^{i_1\cdots i_p}_{jj_2\cdots j_q}\Gamma^{j}_{j_1k}\mathrm{d}x^k-\cdots-T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}j}\Gamma^{j}_{j_qk}\mathrm{d}x^k\Big)v^{j_1}_1\cdots v^{j_q}_q u^1_{i_1}\cdots u^p_{i_p}.
\end{aligned}
$$

类似于逆变导数的引入，通过上式我们可以定义张量的**绝对微商**为

$$
\begin{aligned}
\nabla_k T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=&\frac{\partial T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^k}+T^{ii_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\Gamma^{i_1}_{ik}+\cdots+T^{i_1\cdots i_{p-1}i}_{j_1\cdots j_q}\Gamma^{i_p}_{ik}\\
&-T^{i_1\cdots i_p}_{jj_2\cdots j_q}\Gamma^{j}_{j_1k}-\cdots-T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}j}\Gamma^{j}_{j_qk}.
\end{aligned}
\tag{2.2.16}
$$

此绝对微商，写成算子的形式记做 $\overline{\mathrm{d}}$，即

$$
(\overline{\mathrm{d}}\boldsymbol{T})^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_qk}=\nabla_k T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}. \tag{2.2.17}
$$

容易证明绝对微商算子 $\overline{\mathrm{d}}$ 符合通常的微分运算法则：

(1) $\overline{\mathrm{d}}(c\boldsymbol{T})=c\overline{\mathrm{d}}\boldsymbol{T}$（$c$ 为常数）；

(2) $\overline{\mathrm{d}}(\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S})=\overline{\mathrm{d}}\boldsymbol{T}+\overline{\mathrm{d}}\boldsymbol{S}$；

(3) $\overline{\mathrm{d}}(\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S})=\overline{\mathrm{d}}\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T}\otimes\overline{\mathrm{d}}\boldsymbol{S}$.

这些公式的成立与曲线坐标的选择是无关的. 由定义可以立即看出，绝对微商算子 $\overline{\mathrm{d}}$ 将一个(p,q)阶张量映射到一个$(p,q+1)$阶张量.

度量张量的绝对微商与联络系数的关系体现在下面的定理中.

定理 2.1 $\nabla_k g_{ij}=0$ 的充分必要条件是存在唯一的对称联络系数 Γ^k_{ij}，满足

$$
\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right).
$$

证明 *必要性* 由条件知 $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$，并且

$$
\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma^l_{jk}g_{il}-\Gamma^l_{ik}g_{lj}=0.
$$

重复上一节关于活动标架中联络系数的引进过程即得结论.

充分性 将联络系数的表达式代入绝对微商的定义中即得. ▌

由绝对微商的引进可以看出，在空间中只需给定了联络系数，

则绝对微商的运算就是合法的，它与空间的度量系数无关. 这就是为什么我们说联络系数描述了空间的微分结构.

四、正交曲线坐标与非完整系

当对 n 维空间引进一组曲纹坐标，使它的每一点上的曲线网的切向量都是相互正交的向量时，这样的坐标网就称为**正交曲线坐标**. 十分遗憾的是这种正交曲线坐标并不总是存在的，一般说来只有在三维情况下正交曲线坐标才总是存在的.

假设在 n 维空间中找到了一个正交曲线坐标，记其标架场为 $\boldsymbol{e}_i=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$. 由正交曲线坐标的定义，我们知道 $g_{ij}=0(i\neq j)$，即

$$(g_{ij}) = \mathrm{diag}(g_{11},\cdots,g_{nn}).$$

由对角矩阵的性质立即有

$$(g^{ij}) = \mathrm{diag}(1/g_{11},\cdots,1/g_{nn}).$$

由于度量系数矩阵是如上的对角矩阵，因而相应于度量系数的联络系数也有特殊的形式. 可以证明如下定理：

定理 2.2 对于正交曲线坐标，第一类和第二类 Christoffel 符号为

$$\Gamma_{k,ij} = 0, \quad \Gamma_{ij}^k = 0 \quad (k,i,j\ \text{全不相同});$$

$$\Gamma_{j,ii} = -\frac{1}{2}g_{ii,j}, \quad \Gamma_{ii}^j = -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}} \quad (i\neq j);$$

$$\Gamma_{i,ji} = \Gamma_{i,ij} = \frac{1}{2}g_{ii,j}, \quad \Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = \frac{\partial \ln\sqrt{g_{ii}}}{\partial x^j}.$$

以上所有重复指标均不求和，$g_{ii,j}$ 表示 g_{ii} 对 x^j 的偏导数（后面没有特别说明的地方均采用类似的记号）.

定理的证明请读者自行完成.

对于正交曲线坐标，除了切向量构成的活动标架外，还可以对其引进一组物理标架，即通常的**单位正交标架**：

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\boldsymbol{e}_i}{\|\boldsymbol{e}_i\|} = \frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \sqrt{g^{ii}}\boldsymbol{e}_i, \tag{2.2.18}$$

这里对 i 不求和. 在这组标架下，空间的度量系数是一个单位矩阵：

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j = \delta_{ij}. \tag{2.2.19}$$

在这种情形下，协变基与逆变基就完全重合了. 由于这时的活动标架不再是曲线网的切向量，而是其单位化向量，因而标架的微商也就不再具有 §2.1 中(2.1.18)式所示的那种联络系数与度量系数的协调关系了. 为了讨论清楚这一点，假设存在$(y^1, y^2, \cdots, y^n)$，使得

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y^i},$$

则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y^i} = \frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}).$$

这组方程有解的充分必要条件是方程组

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \sqrt{g_{ii}}\,\delta^i_j \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}) \tag{2.2.20}$$

有解. 一般地，由微分方程的性质知方程组(2.2.20)是无解的. 由此说明了非常重要的一点：一般地，不存在一个切向量为 $\boldsymbol{g}_i$ 的曲纹坐标. 这种以非曲纹坐标的基底组成的标架称为**非完整标架**或**非完整系**(相应地，由曲纹坐标组成的标架称为**完整标架**或**完整系**). 由于不存在曲纹坐标，因而不能在通常意义下定义标架的微商. 为此对非完整标架定义了如下的一种新导数——Pfaff[①] 导数：

定义 2.3 设 $\boldsymbol{e}_i = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$ 是曲纹坐标的标架，而 $\tilde{\boldsymbol{e}}_{i'} = \alpha^j_{i'} \boldsymbol{e}_j$ 是一组新的标架，则在标架 $\tilde{\boldsymbol{e}}_{i'}$ 中定义 **Pfaff 导数**为

$$\partial_{(i')} \triangleq \alpha^j_{i'} \partial_j \quad \left(\text{这里 } \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}\right). \tag{2.2.21}$$

从定义 2.3 中可以看出，如果 $\tilde{\boldsymbol{e}}_{i'}$ 也是曲纹坐标的标架，即存在 $\tilde{x}^{i'}$，使 $\tilde{\boldsymbol{e}}_{i'} = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \tilde{x}^{i'}}$，则 $\partial_{(i')} = \partial_{i'}$. 这与通常的导数定义是一致的. 更进

① J. F. Pfaff (1765—1825)，德国数学家.

一步，当标架是由一种非完整系变到另一种非完整系时，两个标架中的 Pfaff 导数之间的关系也类似于(2.2.21)式所描述的那样.

定义了 Pfaff 导数以后，对于标架的微商及张量的绝对微商中得到的微商运算就可用标架的 Pfaff 导数来替代. 完全平行于完整系中关于联络系数的讨论，对非完整系 $\tilde{e}_{i'}$，定义联络系数 $\tilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'}$ 如下：

$$\partial_{(j')}\tilde{e}_{i'}=\tilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'}\tilde{e}_{k'},\tag{2.2.22}$$

则完整系中 Γ^k_{ij} 的坐标变换规律(2.1.21)式(只考虑其中前一个等式)也可以得到. 同样，绝对微分也可以进行下去. 在非完整系中，一般没有

$$\tilde{\Gamma}^{k'}_{i'j'}=\tilde{\Gamma}^{k'}_{j'i'},$$

也没有与度量系数的协调性(2.1.18)式.

作为一个例子，下面对于单位正交标架这个非完整系来作一些讨论. 设

$$\partial_{(j)}\boldsymbol{g}_i=\gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k,\tag{2.2.23}$$

这里称 γ^k_{ij} 为正交单位标架 $\boldsymbol{g}_i$ 的联络系数. 由于 $\boldsymbol{g}_i=\dfrac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}}$(对 i 不求和)，将 $\boldsymbol{e}_i$ 看做旧坐标，$\boldsymbol{g}_i$ 看做新坐标，则有

$$\alpha^i_j=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\delta^i_j\quad 和\quad \beta^j_i=\sqrt{g_{ii}}\,\delta^j_i\quad(对\ i\ 不求和).$$

由于联络系数在坐标变换下的关系式(2.1.21)是普遍适用的，因而

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{ij}&=\alpha^k_{l'}\partial_j\beta^{l'}_i+\beta^{p'}_i\beta^{q'}_j\alpha^k_{l'}\tilde{\Gamma}^{l'}_{p'q'}\\&=\frac{1}{\sqrt{g_{kk}}}\partial_j\sqrt{g_{ii}}\,\delta^k_i+\sqrt{\frac{g_{ii}g_{jj}}{g_{kk}}}\,\gamma^k_{ij},\end{aligned}$$

上式中后一个等式是不求和的，Γ^k_{ij} 是 $\boldsymbol{e}_i$ 的联络系数. 将 γ^k_{ij} 反解出来：

$$\gamma^k_{ij}=-\frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}\partial_j\ln\sqrt{g_{ii}}\,\delta^k_i+\sqrt{\frac{g_{kk}}{g_{ii}g_{jj}}}\,\Gamma^k_{ij}\quad(对\ i,j,k\ 均不求和).$$

利用定理 2.2 的结论，分析上式可得

$$\gamma_{ij}^{k}=0\quad(k,i,j\text{ 全不相同}),$$

$$\gamma_{ij}^{i}=-\frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}\partial_j\ln\sqrt{g_{ii}}+\frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}\Gamma_{ij}^{i}=0,$$

$$\gamma_{ji}^{i}=\frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}\Gamma_{ji}^{i}=\frac{1}{\sqrt{g_{jj}}}\partial_j\ln\sqrt{g_{ii}}=\partial_{(j)}\ln\sqrt{g_{ii}}\quad(i\neq j),$$

$$\gamma_{ii}^{j}=\frac{\sqrt{g_{jj}}}{g_{ii}}\Gamma_{ii}^{j}=-\frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}\sqrt{g_{jj}}}=-\partial_{(j)}\ln\sqrt{g_{ii}}\quad(i\neq j),$$

这里均不进行约定求和. 综合起来,不为零的联络系数 γ_{ij}^{k} 只有

$$\gamma_{ji}^{i}=-\gamma_{ii}^{j}=\partial_{(j)}\ln\sqrt{g_{ii}}\quad(i\neq j).$$

若令 $H_i=\sqrt{g_{ii}}$(称为正交曲线坐标的 **Lamé**[①] **系数**),则单位正交标架 $\boldsymbol{g}_i$ 对曲线坐标的微商为

$$\frac{\partial\boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}=\beta_j^k\partial_{(k)}\boldsymbol{g}_i=\sqrt{g_{jj}}\,\partial_{(j)}\boldsymbol{g}_i=\sum_{k=1}^{n}H_j\gamma_{ij}^{k}\boldsymbol{g}_k,$$

上式对 j 不求和. 因此有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{g}_i}{\partial x^i}=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}H_i\gamma_{ii}^{j}\boldsymbol{g}_j=-\sum_{j\neq i,j=1}^{n}H_i\partial_{(j)}\ln H_i\boldsymbol{g}_j=-\sum_{j\neq i,j=1}^{n}\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_i}{\partial x^j}\boldsymbol{g}_j,\\[2ex]\dfrac{\partial\boldsymbol{g}_i}{\partial x^j}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}H_j\gamma_{ij}^{k}\boldsymbol{g}_k=H_j\gamma_{ij}^{j}\boldsymbol{g}_j=H_j\partial_{(i)}\ln H_j\boldsymbol{g}_j=\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial x^i}\boldsymbol{g}_j\ (i\neq j).\end{cases}\tag{2.2.24}$$

(2.2.24)式就是通常的标准正交曲线坐标中标架的微分关系. 由于在标准正交系中,逆变基与协变基完全重合,因而不再区分上下标. 另外,从联络系数 γ_{ij}^{k} 的性质知,若记 $\boldsymbol{\Omega}_j=(\gamma_{ij}^{k})$ 为 j 个矩阵的话,则它们均是反对称矩阵. 若又将 $\boldsymbol{g}_i$ 形式地排列为列向量 $\boldsymbol{g}=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_n)$,则有

$$\partial_{(j)}\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{\Omega}_j.\tag{2.2.25}$$

---

① G. Lamé (1795—1870),法国数学家.

五、张量的物理分量

张量在前面引进的标准正交标架中的分量与通常的正交标架中的分量有着不同的形式，这种分量称为张量的**物理分量**. 沿用前面的记号

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{1}{H_i}\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}_i = H_i\boldsymbol{g}_i,$$

则对于任一张量 $\boldsymbol{T}=\left(T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)$，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_p}\otimes\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_q}\\ &= T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{H_{i_1}\cdots H_{i_p}}{H_{j_1}\cdots H_{j_q}}\boldsymbol{g}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}_{i_p}\otimes\boldsymbol{g}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{g}^{j_q},\end{aligned}$$

因而张量 $\boldsymbol{T}$ 在标准正交标架 $\boldsymbol{g}_i$ 中的分量为

$$\widetilde{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{H_{i_1}\cdots H_{i_p}}{H_{j_1}\cdots H_{j_q}} \quad (\text{对 } i_1,\cdots,i_p \text{ 不求和}).$$

在弹性力学中，应力张量在正交曲线坐标中定义为一个(1,1)阶张量：

$$\boldsymbol{T} = t^i_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^j.$$

由于在标准正交标架中上下标不加区分，因而其物理分量为

$$\sigma_{ij} = t^i_j\frac{H_i}{H_j} \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}).$$

六、几个常见的微分算子

设在给定了曲纹坐标 $x^i(i=1,\cdots,n)$ 的 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中，定义了光滑的标量函数 $f(x^1,\cdots,x^n)$，向量函数 $\boldsymbol{a}(x^1,\cdots,x^n)$ 及张量函数 $\boldsymbol{T}(x^1,\cdots,x^n)$. 由于欧氏空间中张量可以通过度量系数来升降指标，这里设

$$\boldsymbol{T}=T_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{e}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{i_p}=T^{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_p}.$$

下面我们来讨论几种定义在这些函数上的一些不变性微分算子.

1. 梯度

标量函数 f 的梯度是一个向量：

$$\mathbf{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\boldsymbol{e}^i = g^{ik}\frac{\partial f}{\partial x^k}\boldsymbol{e}_i. \qquad (2.2.26)$$

在正交曲线标架中，有

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{H_i}\frac{\partial f}{\partial x^i}\boldsymbol{g}_i. \qquad (2.2.27)$$

对于向量函数 $\boldsymbol{a}$，梯度定义为协变微商：

$$\nabla \boldsymbol{a} = \nabla_k a^i \boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}_i = g^{ik}\nabla_k a^j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j. \qquad (2.2.28)$$

这个定义相当于通常所说的**左梯度**. 同样可定义 $\boldsymbol{a}$ 的**右梯度**为

$$\boldsymbol{a}\nabla = \nabla_k a^i \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^k = g^{jk}\nabla_k a^i \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j. \qquad (2.2.29)$$

推广到张量函数 $\boldsymbol{T}$，我们有 $\boldsymbol{T}$ 的**左梯度**和**右梯度**分别为

$$\nabla \boldsymbol{T} = \nabla_k T_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p}, \qquad (2.2.30)$$

$$\boldsymbol{T}\nabla = \nabla_k T_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}^k. \qquad (2.2.31)$$

2. 散度

向量函数 $\boldsymbol{a}$ 的**散度**定义为其梯度的迹：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \nabla_i a^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(a^i\sqrt{g})}{\partial x^i}. \qquad (2.2.32)$$

对于上面这些公式，其中(2.2.32)式中的最后一个等式的正确性是需要验证的. 事实上，注意到

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}G^{ij} = gg^{ji}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = gg^{ji}(\Gamma^l_{ik}g_{lj} + \Gamma^l_{jk}g_{li})$$

$$= 2g\Gamma^i_{ik} = 2g\Gamma^i_{ki},$$

其中 G_{ij} 是 g_{ij} 的代数余子式，因而

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^k}.$$

代入到协变导数定义中，得

$$\nabla_i a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ji}a^j = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}}a^i\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(a^i\sqrt{g})}{\partial x^i}.$$

对于张量函数 $\boldsymbol{T}$，其散度定义为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{T}=\nabla_k T^{ki_2\cdots i_p}\boldsymbol{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_p}=g^{ki_1}\ \nabla_k T_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{e}^{i_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{i_p},\tag{2.2.33}$$

其中第二个等式的正确性是因为对于曲纹坐标有$\nabla_k g_{ij}=0$ 和$\nabla_k g^{ij}=0$.

3. 旋度

向量函数和张量函数的旋度的定义不像梯度与散度的定义那样直接. 一般地，先定义张量 $\boldsymbol{T}$ 的**旋转** $\mathbf{rot}\boldsymbol{T}$ 为其梯度的反称化张量：

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\boldsymbol{T}&=(p+1)[\nabla\boldsymbol{T}]=\frac{1}{p!}\delta^{ki_1\cdots i_p}_{lj_1\cdots j_p}\ \nabla_k T_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{e}^l\otimes\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_p}\\&=\frac{1}{p!}\nabla_k T_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{e}^k\wedge\boldsymbol{e}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^{i_p}\\&=\frac{1}{p!}\partial_k T_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{e}^k\wedge\boldsymbol{e}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^{i_p},\end{aligned}\tag{2.2.34}$$

其中最后一式成立是因为 Γ^k_{ij} 对下标是对称的. 定义了张量的旋转后，其 Hodge 对偶定义为张量的**旋度**：

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\boldsymbol{T}&=*\ (\mathbf{rot}\boldsymbol{T})=*\left(\frac{1}{p!}\partial_k T_{i_1\cdots i_p}\boldsymbol{e}^k\wedge\boldsymbol{e}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^{i_p}\right)\\&=*\left((p+1)\sum_{k<i_1<\cdots<i_p}\delta^{lj_1\cdots j_p}_{ki_1\cdots i_p}\partial_l T_{j_1\cdots j_p}\boldsymbol{e}^k\wedge\boldsymbol{e}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^{i_p}\right).\end{aligned}\tag{2.2.35}$$

于是有（利用上一章 Hodge 星算子的定义）

$$\begin{aligned}(\mathbf{curl}\boldsymbol{T})^{i_{p+1}\cdots i_{n-1}}&=(p+1)\frac{1}{(p+1)!}\frac{1}{\sqrt{g}}\delta^{ki_1\cdots i_{n-1}}_{12\cdots n}\delta^{lj_1\cdots j_p}_{ki_1\cdots i_p}\partial_l T_{j_1\cdots j_p}\\&=\frac{1}{\sqrt{g}p!}\varepsilon^{lj_1\cdots j_p i_{p+1}\cdots i_{n-1}}\partial_l T_{j_1\cdots j_p}.\end{aligned}\tag{2.2.36}$$

显然，张量的旋度是一个 $n-p-1$ 阶反称张量.

特别地，在 $\mathscr{E}^3$ 中，向量函数的旋度为

$$\mathbf{curl}\boldsymbol{a}=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}\partial_i a_j\boldsymbol{e}_k.\tag{2.2.37}$$

这个定义与经典的定义是一致的.

4. Laplace 算子

对于任意张量 $\boldsymbol{T}$,定义其 Laplace[1] 算子为

$$\Delta \boldsymbol{T} = \operatorname{div} \mathbf{grad} \boldsymbol{T} = g^{kl} \nabla_k \nabla_l T_{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{e}^{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}^{i_p}. \tag{2.2.38}$$

从定义可以看出,张量的 Laplace 算子是其梯度的散度.

定义了以上四种微分算子以后,可以证明这些微分算子之间存在许多恒等式,它们在物理学、力学中是经常遇到的.本章后的习题中给出了一些有关的恒等式,请读者进行验证.

七、两点张量场

在研究变形体力学时,经常既要考虑物体变形前的状态又要考虑变形后的状态.我们把物体变形前后所占有的空间区域连同在其上引进的坐标统称为**构形** $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{r}$.在变形前的坐标连同其上下标用大写的字母 $X^I(I=1,2,\cdots,n)$来表示,其基向量的逆变向量和协变向量分别用 $\boldsymbol{G}^I(\boldsymbol{X})$和 $\boldsymbol{G}_I(\boldsymbol{X})(I=1,2,\cdots,n)$来表示;在变形后的坐标连同其上下标用小写的字母 $x^i(i=1,2,\cdots,n)$来表示,其基向量的逆变向量和协变向量分别用 $\boldsymbol{g}^i(\boldsymbol{x})$和 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x})$,$(i=1,2,\cdots,n)$来表示.

在张量的并矢表示式中,如果包含有不同构形中的向量,这样的张量场称为**两点张量场**.我们用在张量的顶端添加符号“＜”和“＞”来表示张量的这种两点性质,前者对应于变形前,后者对应于变形后.

例如:

$$\overset{><}{\boldsymbol{S}} = S_{iI} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{G}^I = S^{iI} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{G}_I = S^{i}_{\cdot I} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{G}^I = S_{i}^{\cdot I} \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{G}_I, \tag{2.2.39}$$

$$\overset{<>}{\boldsymbol{T}} = T_{Ii} \boldsymbol{G}^I \boldsymbol{g}^i = T^{Ii} \boldsymbol{G}_I \boldsymbol{g}_i = T^{I}_{\cdot i} \boldsymbol{G}_I \boldsymbol{g}^i = T_{I}^{\cdot i} \boldsymbol{G}^I \boldsymbol{g}_i, \tag{2.2.40}$$

式中各个分量都是 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 的函数,并且这些分量之间满足指标的升降关系.

---

① M. P. S. Laplace(1749—1827),法国数学家、天文学家、物理学家.

同样也可以对两点张量场定义在有关构形上的协变微商和逆变微商，以及相应的散度和旋度等算子运算.

§2.3 欧氏空间中的曲线

一、曲线的参数方程与弧长

设在欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中给了笛卡儿坐标 $y^i(i=1,2,\cdots,n)$，又给了曲纹坐标 $x^i(i=1,2,\cdots,n)$，空间点用向径

$$\boldsymbol{r}=(y^1,y^2,\cdots,y^n) \tag{2.3.1}$$

表示. 如果给定的曲纹坐标是参数 $t\in[a,b]$的单值函数 $x^i(t)$，则当 t 在$[a,b]$上变化时，点

$$\boldsymbol{r}(t)=(y^1(\boldsymbol{x}(t)),y^2(\boldsymbol{x}(t)),\cdots,y^n(\boldsymbol{x}(t))) \tag{2.3.2}$$

定义了 $\mathscr{E}^n$ 中的一个曲线段. 曲线段上的点在曲纹坐标中的分量 $x^i(t)$是参数 t 的单值函数，我们在今后的讨论中假设 $x^i(t)\in C^\infty[a,b]$. 于是当 t 变化时曲线的微弧元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\dot{x}^j\boldsymbol{e}_j\mathrm{d}t. \tag{2.3.3}$$

按照度量空间中向量长度的定义，切向量微元的长度定义为曲线的弧长微元：

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\mathrm{d}t^2. \tag{2.3.4}$$

因此从曲线段的起点($t=a$)到曲线上一点的弧长为

$$s(t)=\int_a^t\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,\mathrm{d}t. \tag{2.3.5}$$

由于$\boldsymbol{r}(t)$是欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的曲线，由度量系数的性质，$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ 是正定的，因而函数 $s(t)$是一个严格单调递增的函数. 由反函数存在定理可知，严格单调函数必存在反函数，因此由式(2.3.5)总可以求出

$$t=t(s). \tag{2.3.6}$$

将这个关系代入曲线的定义(2.3.2)式中，就得到以弧长为参数的曲线参数方程：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t(s))=\boldsymbol{r}(s). \tag{2.3.7}$$

二、Frenet 公式

由前面的讨论，向量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是曲线的切向量微元，其长度为 $\mathrm{d}s$，因而令

$$\boldsymbol{\tau}_1=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \tag{2.3.8}$$

为曲线的单位切向量. 由于

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_1}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_1=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,\|\boldsymbol{\tau}_1\|^2}{\mathrm{d}s}=0,$$

所以知$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_1}{\mathrm{d}s}$与 $\boldsymbol{\tau}_1$ 是正交的. 记$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_1}{\mathrm{d}s}$方向的单位向量为 $\boldsymbol{\tau}_2$，我们总是有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_1}{\mathrm{d}s}=\kappa_1\boldsymbol{\tau}_2, \tag{2.3.9}$$

其中 κ_1 为实函数.

从正交关系 $\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2=0$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_2}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_1+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_1}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_2=0,\quad 即\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_2}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_1=-\kappa_1.$$

同样的理由知$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_2}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_2=0$. 因此将向量$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_2}{\mathrm{d}s}$扣除$-\kappa_1\boldsymbol{\tau}_1$ 这一部分后，得到的新向量与 $\boldsymbol{\tau}_1$ 及 $\boldsymbol{\tau}_2$ 均正交，记其单位向量为 $\boldsymbol{\tau}_3$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_2}{\mathrm{d}s}=-\kappa_1\boldsymbol{\tau}_1+\kappa_2\boldsymbol{\tau}_3\quad(\kappa_1,\kappa_2\text{ 为实函数}). \tag{2.3.10}$$

依次类推，设我们得到从 $\boldsymbol{\tau}_1$ 到 $\boldsymbol{\tau}_k$ 的微商关系为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_1}{\mathrm{d}s}=\kappa_1\boldsymbol{\tau}_2,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_2}{\mathrm{d}s}=-\kappa_1\boldsymbol{\tau}_1+\kappa_2\boldsymbol{\tau}_3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_k}{\mathrm{d}s}=-\kappa_{k-1}\boldsymbol{\tau}_{k-1}+\kappa_k\boldsymbol{\tau}_{k+1},\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2,\cdots,\boldsymbol{\tau}_{k+1}$相互正交，$\kappa_1,\cdots,\kappa_k$ 为实函数. 由于

$$\boldsymbol{\tau}_{k+1}\cdot\boldsymbol{\tau}_i=0\quad(i\leqslant k),$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_{k+1}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_i=-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_i}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_{k+1}\quad(i\leqslant k).\tag{2.3.11}$$

但当 $i=1,2,\cdots,k-1$ 时，上式右端为零，而当 $i=k$ 时，右端等于 $-\kappa_k$，因而可定义

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_{k+1}}{\mathrm{d}s}=-\kappa_k\boldsymbol{\tau}_k+\kappa_{k+1}\boldsymbol{\tau}_{k+2}\quad(\kappa_k,\kappa_{k+1}\text{ 为实函数}).\tag{2.3.12}$$

易于验证这里单位向量 $\boldsymbol{\tau}_{k+2}$ 与 $\boldsymbol{\tau}_i(i\leqslant k+1)$ 是正交的. 以上的各式对于 $k+2\leqslant n$ 时总可以用归纳法得到，但当 $k=n-1$ 时，有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_n}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_i=0\ (i\leqslant n-2),\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_n}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_{n-1}=-\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_{n-1}}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_n=-\kappa_{n-1},\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_n}{\mathrm{d}s}\cdot\boldsymbol{\tau}_n=0,\end{cases}$$

又因为欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的极大线性无关组只有 n 个向量，因此有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_n}{\mathrm{d}s}=-\kappa_{n-1}\boldsymbol{\tau}_{n-1}.\tag{2.3.13}$$

由上面这些讨论，我们得到如下的定理：

定理 2.3　在欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的曲线，若令 $\boldsymbol{\tau}_1$ 为其单位切向量，则存在与 $\boldsymbol{\tau}_1$ 正交且相互正交的单位向量 $\boldsymbol{\tau}_2,\cdots,\boldsymbol{\tau}_n$，它们之间的微商关系为

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_1}{\mathrm{d}s}\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_2}{\mathrm{d}s}\\ \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_{n-1}}{\mathrm{d}s}\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}_n}{\mathrm{d}s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa_1&0&\cdots&0&0&0\\ -\kappa_1&0&\kappa_2&\cdots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&-\kappa_{n-2}&0&\kappa_{n-1}\\ 0&0&0&\cdots&0&-\kappa_{n-1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\tau}_1\\ \boldsymbol{\tau}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\tau}_{n-1}\\ \boldsymbol{\tau}_n\end{pmatrix},\tag{2.3.14}$$

其中 $\kappa_1,\cdots,\kappa_{n-1}$ 为实函数.

在定理 2.3 中,向量 $\boldsymbol{\tau}_2$ 和 $\boldsymbol{\tau}_3,\cdots,\boldsymbol{\tau}_n$ 分别称为曲线的**主法向量**和第 1 阶至第 $n-2$ 阶**次法向量**,而标量 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_{n-1}$ 称为曲线的第 $1,2,\cdots,n-1$ 阶**曲率**.

对于由(2.3.2)式给出的曲线,它的各阶曲率和各阶次法向量的计算可以用如下的方式来进行:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}_1,$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \kappa_1\dot{s}^2\boldsymbol{\tau}_2 + \ddot{s}\boldsymbol{\tau}_1,$$

$$\dddot{\boldsymbol{r}} = \kappa_1\kappa_2\dot{s}^3\boldsymbol{\tau}_3 + ?\boldsymbol{\tau}_2 + ?\boldsymbol{\tau}_1,$$

$$\boldsymbol{r}^{(4)} = \kappa_1\kappa_2\kappa_3\dot{s}^4\boldsymbol{\tau}_4 + ?\boldsymbol{\tau}_3 + ?\boldsymbol{\tau}_2 + ?\boldsymbol{\tau}_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{r}^{(i)} = \kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_{i-1}\dot{s}^i\boldsymbol{\tau}_i + ?\boldsymbol{\tau}_{i-1} + \cdots + ?\boldsymbol{\tau}_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这里微商过程中用到了(2.3.14)式,$\boldsymbol{r}^{(i)}$ 中的问号部分的项为 $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2,\cdots,\boldsymbol{\tau}_{i-1}$ 的线性组合项.将上述式子顺序作外积,得

$$\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}} = \kappa_1\dot{s}^3\boldsymbol{\tau}_1\wedge\boldsymbol{\tau}_2,$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\dddot{\boldsymbol{r}} = \kappa_1^2\kappa_2\dot{s}^6\boldsymbol{\tau}_1\wedge\boldsymbol{\tau}_2\wedge\boldsymbol{\tau}_3,$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\dddot{\boldsymbol{r}}\wedge\boldsymbol{r}^{(4)} = \kappa_1^3\kappa_2^2\kappa_3\dot{s}^{10}\boldsymbol{\tau}_1\wedge\boldsymbol{\tau}_2\wedge\boldsymbol{\tau}_3\wedge\boldsymbol{\tau}_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{r}^{(i)} = \kappa_1^{i-1}\kappa_2^{i-2}\cdots\kappa_{i-1}\dot{s}^{\frac{i(i+1)}{2}}\boldsymbol{\tau}_1\wedge\boldsymbol{\tau}_2\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\tau}_i.$$

利用第一章中关于向量外积的内积定义,定义以上外形式的长度为

$$\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{r}^{(i)}\|^2 = \begin{vmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} & \cdots & \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}^{(i)} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{r}^{(i)}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} & \cdots & \boldsymbol{r}^{(i)}\cdot\boldsymbol{r}^{(i)} \end{vmatrix}. \quad (2.3.15)$$

因此,我们有

$$\kappa_1\dot{s}^3 = \pm\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\|,$$

$$\kappa_1^2\kappa_2\dot{s}^6 = \pm\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\dddot{\boldsymbol{r}}\|,$$

$$\kappa_1^3\kappa_2^2\kappa_3\dot{s}^{10}=\pm\ \|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\dddot{\boldsymbol{r}}\wedge\boldsymbol{r}^{(4)}\|,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\kappa_1^{i-1}\kappa_2^{i-2}\cdots\kappa_{i-1}\dot{s}^{\frac{i(i+1)}{2}}=\pm\ \|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{r}^{(i)}\|.$$

由此可以解出

$$\begin{cases}\kappa_1=\pm\dfrac{\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\|}{\dot{s}^3},\\ \kappa_2=\pm\dfrac{\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\dddot{\boldsymbol{r}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\|^2},\\ \kappa_3=\pm\dfrac{\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\dddot{\boldsymbol{r}}\wedge\boldsymbol{r}^{(4)}\|\cdot\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\|}{\dot{s}\ \|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\dddot{\boldsymbol{r}}\|^2},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \kappa_{i-1}=\pm\dfrac{\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{r}^{(i)}\|\cdot\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{r}^{(i-2)}\|}{\dot{s}\ \|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{r}^{(i-1)}\|^2}\quad(i=4,\cdots,n).\end{cases}\tag{2.3.16}$$

以上各式就是 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_{n-1}$ 的计算公式. 由于同一单位向量可取两个相反的值,因而对应 $\kappa_1,\kappa_2,\cdots,\kappa_{n-1}$ 也有正负两个值. 有了上述的各阶曲率 κ_i 以后,由(2.3.14)式并利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dot{s}\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$ 可以将 $\boldsymbol{\tau}_i$ 用 $\dot{\boldsymbol{r}},\cdots,\boldsymbol{r}^{(n)}$ 表示出来. 限于篇幅,这里就不一一列举了.

以上的结论,当 $n=3$ 时就是通常三维欧氏空间中曲线的 **Frenet**① **公式**:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}=\kappa_1\boldsymbol{n},\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}=-\kappa_1\boldsymbol{\tau}+\kappa_2\boldsymbol{b},\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}=-\kappa_2\boldsymbol{n},\end{cases}\tag{2.3.17}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是切向量,$\boldsymbol{n}$ 是主法向量,$\boldsymbol{b}$ 是次法向量,而 κ_1 和 κ_2 分别表示曲线的曲率和挠率. 对于一般参数方程(2.3.2),曲率和挠率的计算公式由(2.3.16)式中的前两式给出.

---

① J. F. Frenet(1816—1900),法国数学家.

三、曲线的密切性质

对于一组给定的单变量函数 $\kappa_i(s)(i=1,2,\cdots,n-1)$，由方程组(2.3.14)给出了关于向量 $\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2,\cdots,\boldsymbol{\tau}_n$ 的一个线性常微分方程组. 一般地讲，若我们在空间的初始点上给定一个初始的标架 $\boldsymbol{\tau}_i(s_0)=\boldsymbol{\tau}_i^0(i=1,2,\cdots,n)$，则上述的常微分方程组存在唯一的解.

另外，对于充分光滑的曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，在 $s=s_0$ 点有如下的 Taylor[①] 展式：

$$\boldsymbol{r}(s)=\boldsymbol{r}(s_0)+\dot{\boldsymbol{r}}(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2!}\ddot{\boldsymbol{r}}(s_0)(s-s_0)^2+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{r}^{(k)}(s_0)(s-s_0)^k+\cdots, \tag{2.3.18}$$

其中 $\boldsymbol{r}^{(k)}(s_0)$ 具有如下形式：

$$\boldsymbol{r}^{(k)}(s_0)=\sum_{i=1}^{n}f_i^k(\kappa_1,\cdots,\kappa_{n-1})\big|_{s=s_0}\boldsymbol{\tau}_i^0,$$

而 $f_i^k(\kappa_1,\cdots,\kappa_{n-1})$ 则是 $\kappa_1,\cdots,\kappa_{n-1}$ 及其各阶导数的函数，即 $\boldsymbol{r}(s)$ 的各阶导数仅与 $\kappa_i(s)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 及其各阶导数有关. 由此我们知道：若给出曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 在其初始点 $s=s_0$ 上的初始标架，则这条曲线在空间的位置就完全由 $\kappa_i(s)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 所确定了. 一般地，初始标架的不同代表了这条曲线在空间的一个刚体转动. 这一事实说明 $\kappa_i(s)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 是刻画曲线的最重要的一组不变量.

我们还可以从另一个角度来说明以上事实.

命题　在欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中给定 $n-1$ 个曲率函数 $\kappa_i=\kappa_i(s)(i=1,2,\cdots,n-1)$，则由这组曲率函数所确定的空间曲线只相差空间的刚体位移.

为了说明这一点，假设由这组曲率函数可以确定两条不同的曲线 γ 和 γ'，它们在相同的弧长点 s 处有相同的 $n-1$ 个曲率. 记

① B. Taylor(1685—1731)，英国数学家.

它们的伴随标架分别为 $\boldsymbol{\tau}_i$ 和 $\boldsymbol{\tau}'_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则由 Frenet 公式我们有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}'_1)=\kappa_1\boldsymbol{\tau}_2\cdot\boldsymbol{\tau}'_1+\kappa_1\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}'_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\tau}_2\cdot\boldsymbol{\tau}'_2)=(-\kappa_1\boldsymbol{\tau}_1+\kappa_2\boldsymbol{\tau}_3)\cdot\boldsymbol{\tau}'_2+\boldsymbol{\tau}_2\cdot(-\kappa_1\boldsymbol{\tau}'_1+\kappa_2\boldsymbol{\tau}'_3),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\tau}_i\cdot\boldsymbol{\tau}'_i)=(-\kappa_{i-1}\boldsymbol{\tau}_{i-1}+\kappa_i\boldsymbol{\tau}_{i+1})\cdot\boldsymbol{\tau}'_i+\boldsymbol{\tau}_i\cdot(-\kappa_{i-1}\boldsymbol{\tau}'_{i-1}+\kappa_i\boldsymbol{\tau}'_{i+1}),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\tau}_n\cdot\boldsymbol{\tau}'_n)=-\kappa_{n-1}\boldsymbol{\tau}_{n-1}\cdot\boldsymbol{\tau}'_n-\kappa_{n-1}\boldsymbol{\tau}_n\cdot\boldsymbol{\tau}'_{n-1}.\end{cases}$$

把上面这些式子加起来，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\tau}_i\cdot\boldsymbol{\tau}'_i\Big)=0.$$

这表明两个标架初始时的相互状态是保持不变的. 特别地，当初始标架重合时，以后永远重合，也就是说这两条曲线是重合的.

在活动标架 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 中，曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}=\dot{x}^i\boldsymbol{e}_i,$$

而切向量的微商为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}=(\ddot{x}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k)\boldsymbol{e}_i=\mu^i\boldsymbol{e}_i. \tag{2.3.19}$$

上式右端中的 μ^i 是曲线的法向量在活动坐标系中的坐标，它表明了曲线偏离于直线的性质. 当 $\mu^i\equiv0$ $(i=1,2,\cdots,n)$时，说明切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 沿曲线没有变化，亦即曲线是沿一条直线的. 若将 $\boldsymbol{r}(s)$看做是质点在空间中的运动轨迹，则 μ^i 体现了法向外力对质点的作用.

另外，考虑到(2.3.14)式中的第一个式子，有

$$\mu^i\boldsymbol{e}_i=\kappa_1\boldsymbol{\tau}_2,$$

因而我们可以得到曲线的主曲率在曲纹坐标中的计算公式：

$$\kappa_1^2=g_{ij}\mu^i\mu^j. \tag{2.3.20}$$

四、例子与应用——曲杆的弯曲

作为曲线几何的一个应用，我们来考虑三维空间中一条截面形状任意的弹性曲线在弯曲变形时所满足的方程.

先考虑曲线的几何关系. 设曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，如图 2.1 所示，其主法向量、次法向量及切向量组成一个标架$\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{b},\boldsymbol{\tau}\}$，曲线上标架的微商关系为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{n},\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s}=-\dfrac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau}+\dfrac{1}{T}\boldsymbol{b},\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}=-\dfrac{1}{T}\boldsymbol{n},\end{cases}$$

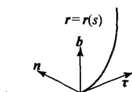


图 2.1

这里 ρ^{-1} 和 T^{-1} 就是前面谈到的 κ_1 和 κ_2，在三维空间中称为曲线的曲率和挠率.

另外，设曲线的截面形状如图 2.2 所示，O 是截面的形心，而截面的主轴方向为 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$. 若设与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 组成右手系的 $\boldsymbol{e}_3$ 方向仍为 $\boldsymbol{\tau}$，则$\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{b},\boldsymbol{\tau}\}$与$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$这两个标架之间的关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{n}\cos\theta+\boldsymbol{b}\sin\theta,\\ \boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{n}\sin\theta+\boldsymbol{b}\cos\theta,\\ \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{\tau},\end{cases}$$

这里 θ 表示 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 之间的夹角，它显然也是 s 的函数. 利用上面的两组关系，我们有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_1}{\mathrm{d}s}=\left(\dfrac{1}{T}+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)\boldsymbol{e}_2-\dfrac{1}{\rho}\cos\theta\boldsymbol{e}_3,\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_2}{\mathrm{d}s}=-\left(\dfrac{1}{T}+\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)\boldsymbol{e}_1+\dfrac{1}{\rho}\sin\theta\boldsymbol{e}_3,\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_3}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{\rho}\cos\theta\boldsymbol{e}_1-\dfrac{1}{\rho}\sin\theta\boldsymbol{e}_2.\end{cases}$$

此微商关系可以简写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}s}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i\quad(i=1,2,3),\tag{2.3.21}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3$，而

$$\omega_1=\frac{1}{\rho}\sin\theta,\quad \omega_2=\frac{1}{\rho}\cos\theta,\quad \omega_3=\frac{1}{T}+\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}.$$

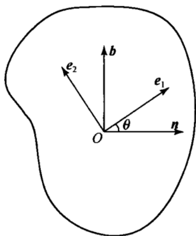


图 2.2

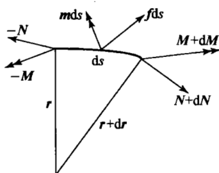


图 2.3

接下来再考虑曲线上的平衡条件. 设曲线的一段弧长微元上的受力情况如图 2.3 所示，其中 $\boldsymbol{N}$ 是内力，$\boldsymbol{M}$ 是内力矩，$\boldsymbol{f}$ 是曲线上单位长度的外力，$\boldsymbol{m}$ 是曲线上单位长度的外力矩. 利用微元上力的平衡条件与力矩的平衡条件，略去高阶小量，我们有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{N}+\boldsymbol{m}=\boldsymbol{0}.\end{cases}\tag{2.3.22}$$

令内力 $\boldsymbol{N}$ 与内力矩 $\boldsymbol{M}$ 在标架$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$中的分解式分别为

$$\boldsymbol{N}=N_i\boldsymbol{e}_i\quad 和\quad \boldsymbol{M}=M_i\boldsymbol{e}_i,$$

则知 N_1 与 N_2 代表了横向剪力，N_3 代表了轴向力，M_1 与 M_2 表示弯矩，M_3 表示扭矩. 将(2.3.22)式写成分量形式，有

$$
\begin{cases}
\dfrac{dN_1}{ds}+\omega_2 N_3-\omega_3 N_2+f_1=0,\\
\dfrac{dN_2}{ds}+\omega_3 N_1-\omega_1 N_3+f_2=0,\\
\dfrac{dN_3}{ds}+\omega_1 N_2-\omega_2 N_1+f_3=0,\\
\dfrac{dM_1}{ds}+\omega_2 M_3-\omega_3 M_2-N_2+m_1=0,\\
\dfrac{dM_2}{ds}+\omega_3 M_1-\omega_1 M_3+N_1+m_2=0,\\
\dfrac{dM_3}{ds}+\omega_1 M_2-\omega_2 M_1+m_3=0,
\end{cases}
\tag{2.3.23}
$$

这里 $\boldsymbol{f}=f_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{m}=m_i\boldsymbol{e}_i$.

最后考虑材料的本构关系. 由于方程是建立在截面的主轴上的，因而弹性关系为

$$
\begin{cases}
M_1=A\omega_1=EJ_1\omega_1,\\
M_2=B\omega_2=EJ_2\omega_2,\\
M_3=C\omega_3=GJ_\rho\omega_3,
\end{cases}
\tag{2.3.24}
$$

这里 E 和 G 是曲杆的杨氏模量和剪切模量，而 $A=EJ_1$，$B=EJ_2$ 及$C=GJ_\rho$ 分别表示两个方向上的弯曲刚度及扭转刚度.

(2.3.23)式和(2.3.24)式就给出了曲杆在几何大变形时的弹性方程组，这是一个非线性的方程组. 将(2.3.24)式代入(2.3.23)式的最后三个式子中，就得到

$$
\begin{cases}
A\dfrac{d\omega_1}{ds}+(C-B)\omega_2\omega_3=N_2-m_1,\\
B\dfrac{d\omega_2}{ds}+(A-C)\omega_3\omega_1=-N_1-m_2,\\
C\dfrac{d\omega_3}{ds}+(B-A)\omega_1\omega_2=-m_3.
\end{cases}
\tag{2.3.25}
$$

应当指出的是，这个方程和刚体绕固定点运动的方程有相同的形式. 实际上，这不是偶然的. 由于刚体绕固定点运动是描述一个固

定于刚体上的标架随时间变化的规律，而杆的弯曲是描述在曲杆上的伴随标架$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$沿杆轴变化的规律，所以两个问题的微分方程具有完全相同的形式. 对于杆弯曲的方程(2.3.23)，(2.3.24)和(2.3.25)最早是由德国科学家 Kirchhoff① 在 19 世纪末得到的.

§2.4 曲 面 论

一、欧氏空间的子流形

定义 2.4 在 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中，令$\{x^\alpha\}$是其一组曲纹坐标. 若由 $n-p$ 个光滑函数所给出的方程组

$$\begin{cases} f_1(x^1,\cdots,x^n)=0, \\ f_2(x^1,\cdots,x^n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-p}(x^1,\cdots x^n)=0 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

的 Jacobi 矩阵$\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x^\alpha}\right)$的秩是 $n-p$，则由方程组(2.4.1)所确定的 $\mathscr{E}^n$ 中的点集 $\mathscr{M}_p$ 称为 $\mathscr{E}^n$ 中的一个 p **维光滑子流形**.

例如，§2.3 所讨论的欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的曲线就是 $\mathscr{E}^n$ 中的一维子流形.

对于上面所定义的子流形，可以定义其局部坐标. 设 $\boldsymbol{p}_0\in\mathscr{M}_p$，在 $\boldsymbol{p}_0$ 处矩阵$\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x^\alpha}\right)$中对应于 $x^{\alpha_{p+1}},\cdots,x^{\alpha_n}$ 的 $n-p$ 阶子式不为零(由定义2.4知这样的子式总是存在的)，则由隐函数存在定理，在 $\boldsymbol{p}_0$ 的某个邻域中可以令 $x^{\alpha_{p+1}},\cdots,x^{\alpha_n}$ 作为函数，而其余的 $x^{\alpha_1},\cdots,x^{\alpha_p}$ 作为自变量，记做 $u^1,\cdots,u^p$，将方程组(2.4.1)反解出来（这样的表示在局部是唯一的）：

---

① G. R. Kirchhoff(1824—1887)，德国数学家、力学家、物理学家.

$$\begin{cases} x^{\alpha_1} = u^1, \\ \cdots\cdots \\ x^{\alpha_p} = u^p, \\ x^{\alpha_{p+1}} = x^{\alpha_{p+1}}(u^1,\cdots,u^p), \\ \cdots\cdots \\ x^{\alpha_n} = x^{\alpha_n}(u^1,\cdots,u^p). \end{cases} \tag{2.4.2}$$

这样在 $\mathscr{M}_p$ 中点 $\boldsymbol{p}_0$ 的某个邻域上定义了一个局部坐标$(u^1,\cdots,u^p)$. 一般地,在 p 维子流形 $\mathscr{M}_p$ 中是不存在整体的坐标系的.

设 $G_{\alpha\beta}(\alpha,\beta=1,2,\cdots,n)$是欧氏空间 $\mathscr{E}^n$中的度量系数,则在局部坐标$(u^1,\cdots,u^p)$中,子流形 $\mathscr{M}_p$ 中的任一曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$的切向量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}\mathrm{d}u^i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\mathrm{d}u^i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\mathrm{d}u^i\boldsymbol{e}_\alpha,$$

其弧长微分为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = G_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^j}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j. \tag{2.4.3}$$

因此我们可以定义子流形 $\mathscr{M}_p$ 中的度量系数为

$$g_{ij} = G_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} \quad (i,j=1,2,\cdots,p), \tag{2.4.4}$$

而二次型

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j \tag{2.4.5}$$

则称为子流形 $\mathscr{M}_p$ 的**度量标准形**,也称做**第一标准二次形**,简称为**第一标形**.

在子流形 $\mathscr{M}_p$ 的局部坐标$(u^1,\cdots,u^p)$中,向量 $\boldsymbol{r}_{u^i}=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}$是线性无关的(由定义 2.4 知),因而可以取其作为 $\mathscr{M}_p$ 的一组活动标架. 根据第一章中关于向量外积的讨论,任意两个向量所张成的平行四边形的面积可以用这两个向量的外积来表示. 类似地,子流形 $\mathscr{M}_p$ 中 q $(q\leqslant p)$个切向量 $\boldsymbol{r}_{u^{i_1}},\cdots,\boldsymbol{r}_{u^{i_q}}$ 所张成的平行几何体的 q 阶几何度量可以用外形式

$$\boldsymbol{r}_{u^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{r}_{u^{i_q}} \tag{2.4.6}$$

来表示.考虑到外形式的内积的定义,我们知道外形式(2.4.6)的长度(即对自身的内积的平方根)只依赖于各向量的坐标和第一标形中的度量系数 g_{ij},因此我们说第一标形决定了子流形的所有度量性质:长度、角度以及各阶体积.

设在子流形 $\mathscr{M}_p$ 的点上给定了一个局部坐标架,则其切向量

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i}\mathrm{d}u^i$$

组成了一个 p 维的向量空间,称为子流形 $\mathscr{M}_p$ 的**切空间**.在欧氏空间$\mathscr{E}^n$中,存在子流形 $\mathscr{M}_p$ 的法向量 $\boldsymbol{n}$ (显然 $\boldsymbol{n}$ 一般说来是不唯一的),满足:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{2.4.7}$$

(实际上 $\boldsymbol{n}$ 属于子流形的切空间在$\mathscr{E}^n$中的正交补).若子流形 $\mathscr{M}_p$ 是充分光滑的,对(2.4.7)式求一次微分有

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}^2\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0,$$

其中左端的第一项是一个二次微分形.称这个微分形为子流形 $\mathscr{M}_p$ 的**第二标准二次形**(简称**第二标形**),记做Ⅱ,即

$$\mathrm{II} = \boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}^2\boldsymbol{r} = b_{ij}\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j, \tag{2.4.8}$$

这里 $b_{ij} = \boldsymbol{n} \cdot \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial u^i \partial u^j} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u^j}$.

从上述定义可以看出,第二标形描述了子流形的切向量的改变,也就是说它刻画了子流形在欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的弯曲性质.没有弯曲的子流形,即平坦的子流形满足 $\mathrm{II} \equiv 0$.

由于欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 本身也可以看做是自身的子流形,并因为在$\mathscr{E}^n$ 上不存在与 n 个切向量均正交的法向量 $\boldsymbol{n}$,故其第二标形 $\mathrm{II} \equiv 0$,也就是说欧氏空间是平直的空间.

二、曲面与曲面的弯曲性质

三维欧氏空间中的二维子流形就是曲面.依照前面的讨论,曲

面上的两个标准二次形为

$$\begin{cases} \mathrm{I} = g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j, \\ \mathrm{II} = b_{ij}\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j. \end{cases}$$

按照传统的记法，有

$$E = g_{11},\quad F = g_{12},\quad G = g_{22},$$
$$L = b_{11},\quad M = b_{12},\quad N = b_{22}.$$

设曲面上有一条曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，则

$$\kappa_n = \boldsymbol{n}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s^2} = \boldsymbol{n}\cdot(\kappa_*\boldsymbol{n}^*) = \kappa_*\cos\varphi \qquad (2.4.9)$$

称为曲面沿曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 的**法曲率**，其中 κ_* 是曲线的曲率，$\boldsymbol{n}^*$ 是曲线的法向量，φ 是曲面的法向与曲线法向之间的夹角. 由于曲面上过同一点以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为同一切向量的曲线有很多，当我们选取一条特殊曲线使其法向量 $\boldsymbol{n}^*$ 与曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 一致时，得到的 κ_n 称为曲面在该点沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 方向的法曲率. 这个法曲率也就是法向量 $\boldsymbol{n}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 方向决定的平面与曲面的交线在该点的曲率.

反过来，若曲面在一点沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 方向的法曲率为 κ_n，则同一切向量的任一曲线的曲率 κ_* 为

$$\kappa_* = \kappa_n/\cos\varphi = \kappa_n/(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}^*).$$

公式(2.4.9)和上面这个关系也称为 **Meusnier**[①] **定理**.

接下来的问题是：怎样的方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 上的法曲率取到极值？在实际应用中这样的方向是很有用的. 事实上，由(2.4.9)式，对于方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，有

$$\kappa_n = \frac{b_{ij}\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j}{g'_{ij}\,\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}. \qquad (2.4.10)$$

这样，问题就归结于寻求 $\mathrm{d}u^i$，使 κ_n 取极值.

首先要说明的是 κ_n 的极值是必然存在的. 这是因为 κ_n 的极值是在 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的单位向量上取到的，而 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的单位向量属于一个有界闭

① J. Meusnier(1754—1793)，法国数学家.

集，同时 κ_n 是这个有界闭集上的连续函数. 其次，极值点的必要条件为

$$\kappa_n g_{ij} \mathrm{d}u^j = b_{ij} \mathrm{d}u^j. \tag{2.4.11}$$

由于 $\mathrm{d}u^j$ 不是迷向的，因而上面的齐次式使 $\mathrm{d}u^j$ 有非零解的条件等价于

$$\det(\kappa_n g_{ij} - b_{ij}) = 0, \tag{2.4.12}$$

即

$$\kappa_n^2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) - \kappa_n(g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}) + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0.$$

这个方程实际上是矩阵(b_{ij})在矩阵(g_{ij})下的广义特征值问题的特征方程. 由于 $\det(g_{ij}) \neq 0$，即上述关于 κ_n 的方程的二次项总是不为零的，并且(g_{ij})与(b_{ij})均是实对称矩阵，因此上述方程必然存在两个实特征根 κ_1 和 κ_2. 将 κ_1 和 κ_2 这两个实根代入到(2.4.11)式中，可求得 $\mathrm{d}u_1^i$ 和 $\mathrm{d}u_2^i$ 的两组特征向量，分别记做 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$. 这两个特征方向称为曲面的**主方向**，而相应的特征根称为曲面的**主曲率**.

下面我们来讨论曲面的主方向和主曲率的一些性质.

性质 1 当 $\kappa_1 \neq \kappa_2$ 时，有 $g_{ij}\mathrm{d}u_1^i\mathrm{d}u_2^j = 0$，即两个主方向是相互正交的.

证明 由于两个方向都满足方程组(2.4.11)，故把它们代入得

$$\begin{cases} \kappa_1 g_{ij} \mathrm{d}u_1^j - b_{ij} \mathrm{d}u_1^j = 0, \\ \kappa_2 g_{ij} \mathrm{d}u_2^j - b_{ij} \mathrm{d}u_2^j = 0. \end{cases}$$

将第一个方程组的两个方程分别与 $\mathrm{d}u_2^i$ 相乘求和，把第二个方程组的两个方程分别与 $\mathrm{d}u_1^i$ 相乘求和，即得

$$\begin{cases} \kappa_1 g_{ij} \mathrm{d}u_1^j \mathrm{d}u_2^i - b_{ij} \mathrm{d}u_1^j \mathrm{d}u_2^i = 0, \\ \kappa_2 g_{ij} \mathrm{d}u_2^j \mathrm{d}u_1^i - b_{ij} \mathrm{d}u_2^j \mathrm{d}u_1^i = 0. \end{cases}$$

再将所得到的两个和相减，考虑到两式的第二项相同，得

$$(\kappa_1 - \kappa_2) g_{ij} \mathrm{d}u_1^i \mathrm{d}u_2^j = 0,$$

于是当 $\kappa_1 \neq \kappa_2$ 时，就得到 $g_{ij}\,\mathrm{d}u_1^i\,\mathrm{d}u_2^j=0$，这就是我们要证明的. ▌

显然，若 $\kappa_1=\kappa_2$，则任意切平面内的方向均是曲面的主方向，且 $\kappa_n=\kappa_1=\kappa_2$ 对任意方向的法曲率均成立.

同样，当 $\kappa_1\neq\kappa_2$ 时，由上面的证明知，若得到的两个和中有一项为零，另一项也必然为零. 于是有如下的性质：

性质 2　当 $\kappa_1\neq\kappa_2$ 时，有 $b_{ij}\,\mathrm{d}u_1^i\,\mathrm{d}u_2^j=0$（具有这个性质时称两个主方向是共轭的）.

另外，由二次方程的根与系数的关系有

$$H=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)=\frac{g_{11}b_{22}+g_{22}b_{11}-2g_{12}b_{12}}{2(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)},\quad(2.4.13)$$

称其为曲面的**平均曲率**，而

$$\kappa=\kappa_1\kappa_2=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\quad(2.4.14)$$

称为曲面的**全曲率**或 **Gauss 曲率**. 当 $\kappa>0$ 时，曲面上的点称为**椭圆点**；当 $\kappa<0$ 时，称为**双曲点**；当 $\kappa=0$ 时，称为**抛物点**. H 和 κ 都是刻画曲面在一点的弯曲性质的不变量，它们的值与坐标的选取是无关的.

三、曲面论的基本方程

在曲面上取 $\boldsymbol{r}_i=\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u^i}$ 为标架（在后续的讨论中，任意函数 f 对第 i 个自变量的导数记为 f_i），取它的法向量为 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{g}}$，这里

$$g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2>0.$$

由定义 $b_{ij}=\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{n}$，故有

$$\boldsymbol{r}_{ij}=\Gamma_{ij}^k\boldsymbol{r}_k+b_{ij}\boldsymbol{n},\quad(2.4.15)$$

其中 Γ_{ij}^k 与以前的定义是一样的，它与 g_{ij} 的关系为

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j}+g_{jl,i}-g_{ij,l}).\quad(2.4.16)$$

由于 $\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{n}=0$，因此令

$$\boldsymbol{n}_i = -b_i^j \boldsymbol{r}_j. \tag{2.4.17}$$

将上式两边对 $\boldsymbol{r}_k$ 作内积，得

$$\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{r}_k = -b_{ik} = -b_i^j g_{jk},$$

故有

$$b_i^j = g^{jk} b_{ik}.$$

将上面的关系写在一起，我们得到了曲面上一点的活动标架的微商关系：

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{r}_k + b_{ij} \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}_i = -b_{ik} g^{jk} \boldsymbol{r}_j. \end{cases} \tag{2.4.18}$$

这组方程实际上给出了曲面上每一点活动标架$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n})$的微商在标架自己之上的表达式. 有了它，在曲面上的任何向量和张量场都可以进行求微商了.

如果将(2.4.18)式看做是关于标架$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n})$的一组微分方程，则当 g_{ij} 与 b_{ij} 已知时，曲面的向径 $\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$在点(u_0^1, u_0^2)可展为 Taylor 级数. 利用(2.4.18)式，向径 $\boldsymbol{r}(u^1, u^2)$在(u_0^1, u_0^2)点的各阶导数都可以求得，它们由 g_{ij} 与 b_{ij} 完全确定，即我们有

$$\boldsymbol{r}(u^1, u^2) = \boldsymbol{r}(u_0^1, u_0^2) + \boldsymbol{r}_i(u_0^1, u_0^2)(u^i - u_0^i) + \frac{1}{2} \boldsymbol{r}_{ij}(u_0^1, u_0^2)(u^i - u_0^i)(u^j - u_0^j) + \cdots.$$

由于 $\boldsymbol{r}$ 在(u_0^1, u_0^2)点的各高阶导数都可由 g_{ij} 与 b_{ij} 完全确定，只有 $\boldsymbol{r}(u_0^1, u_0^2)$, $\boldsymbol{r}_i(u_0^1, u_0^2)$ $(i=1,2)$三个向量可以变化，因此曲面只差一个空间的刚体运动位置就被完全确定了. 由于这个性质，方程组(2.4.18)也被称为是曲面的**基本方程组**，有了它就可以基本上确定曲面.

四、Gauss 方程与 Codazzi 方程

前面的讨论中，我们谈到了只要给出了曲面上的 g_{ij} 与 b_{ij} 这两组参数，曲面的形状就全部确定了. 但从另一方面看，决定曲面上的一个点的位置只需要它在空间中的三个坐标即可，而 g_{ij} 与 b_{ij} 却

一共有六个参数,这说明 g_{ij} 与 b_{ij} 之间必然存在某种关系,使独立的参数只有三个.这些关系称为曲面的第一标形与第二标形的**协调方程**,一般又称为 **Gauss 方程**和 **Codazzi**[①] **方程**.下面我们就来讨论这些关系.

由(2.4.18)式,有

$$\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_k=\Gamma_{ij}^l g_{kl}=\frac{1}{2}(g_{ik,j}+g_{jk,i}-g_{ij,k}).$$

对此式求微商,得

$$\boldsymbol{r}_{ijl}\cdot\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_{kl}=\frac{1}{2}(g_{ik,jl}+g_{jk,il}-g_{ij,kl}).$$

同理,对换指标 j,l,我们有

$$\boldsymbol{r}_{ilj}\cdot\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{r}_{il}\cdot\boldsymbol{r}_{kj}=\frac{1}{2}(g_{ik,lj}+g_{lk,ij}-g_{il,kj}).$$

上述两式相减,得到

$$\boldsymbol{r}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_{kl}-\boldsymbol{r}_{il}\cdot\boldsymbol{r}_{jk}=\frac{1}{2}(g_{jk,il}+g_{il,jk}-g_{ij,kl}-g_{kl,ij}).$$

由于指标 i,j,k,l 均是从 1 到 2,因而上式实际上只有一个独立的表达式,即

$$\boldsymbol{r}_{11}\cdot\boldsymbol{r}_{22}-\boldsymbol{r}_{12}\cdot\boldsymbol{r}_{12}=\frac{1}{2}(2g_{12,12}-g_{11,22}-g_{22,11}).$$

最后,将(2.4.18)式代入上式,我们得到

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=-\frac{1}{2}(g_{11,22}+g_{22,11}-2g_{12,12})+(\Gamma_{12}^k\Gamma_{12}^l-\Gamma_{11}^k\Gamma_{22}^l)g_{kl}. \tag{2.4.19}$$

用传统记号写出来就是:

$$Ln-M^2=-\frac{1}{4g}\begin{vmatrix}E&F&G\\E_1&F_1&G_1\\E_2&F_2&G_2\end{vmatrix}-\frac{\sqrt{g}}{2}\left[\left(\frac{E_2-F_1}{\sqrt{g}}\right)_2+\left(\frac{G_1-F_2}{\sqrt{g}}\right)_1\right]$$

---

① D. Codazzi(1824—1873),意大利数学家.

$$= \frac{\sqrt{g}}{2}\left[\left(\frac{F}{E\sqrt{g}}E_2 - \frac{G_1}{\sqrt{g}}\right)_1 + \left(\frac{2F_1 - E_2}{\sqrt{g}} - \frac{F}{E\sqrt{g}}E_1\right)_2\right],$$

或者

$$Ln - M^2 = \frac{\sqrt{g}}{2}\left[\left(\frac{2F_2 - G_1}{\sqrt{g}} - \frac{F}{G\sqrt{g}}G_2\right)_1 + \left(\frac{F}{G\sqrt{g}}G_1 - \frac{E_2}{\sqrt{g}}\right)_2\right]. \tag{2.4.20}$$

(2.4.19)式或(2.4.20)式称为曲面上的 **Gauss 方程**.

从(2.4.19)式可以看出，如果对其两端同时除以 $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$，则得到 Gauss 曲率的一个表达式：

$$\kappa = -\frac{1}{2g}(g_{11,22} + g_{22,11} - 2g_{12,12}) + (\Gamma_{12}^k\Gamma_{12}^l - \Gamma_{11}^k\Gamma_{22}^l)\frac{g_{kl}}{g}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\left(\frac{2F_2 - G_1}{\sqrt{g}} - \frac{F}{G\sqrt{g}}G_2\right)_1 + \left(\frac{F}{G\sqrt{g}}G_1 - \frac{E_2}{\sqrt{g}}\right)_2\right]. \tag{2.4.21}$$

也就是说，Gauss 曲率 κ 只与曲面上的度量性质有关.

为了得到另外两个方程，考虑

$$b_{ij} = -\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{n}_j.$$

对此式求微商，得

$$b_{ij,k} = -\boldsymbol{r}_{ik} \cdot \boldsymbol{n}_j - \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{n}_{jk}.$$

同理，对换指标 j,k，得

$$b_{ik,j} = -\boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}_k - \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{n}_{kj}.$$

上面的两个关系相减，推出

$$b_{ij,k} - b_{ik,j} = \boldsymbol{r}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}_k - \boldsymbol{r}_{ik} \cdot \boldsymbol{n}_j.$$

类似于 Gauss 方程的推导，上式只有如下两个独立的表达式：

$$b_{i1,2} - b_{i2,1} = \boldsymbol{r}_{i1} \cdot \boldsymbol{n}_2 - \boldsymbol{r}_{i2} \cdot \boldsymbol{n}_1.$$

将(2.4.18)式代入上式，并利用 $b_{ij} = -\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{n}_j$，得到

$$b_{i1,2} - b_{i2,1} = \Gamma_{i2}^j b_{j1} - \Gamma_{i1}^j b_{j2}. \tag{2.4.22}$$

(2.4.22)式在 $i = 1, 2$ 时得到两个方程，这两个方程称为曲面的 **Codazzi 方程**.

曲面的基本方程(2.4.18)说明了曲面上的标架在给定了 g_{ij} 与 b_{ij} 后可以进行微商.而(2.4.19)式和(2.4.22)式则说明了在给定了怎样的 g_{ij} 与 b_{ij} 以后,(2.4.18)式才决定了曲面上的标架微商.这也就是说,当给定了满足(2.4.19)式与(2.4.22)式的 g_{ij} 与 b_{ij} 时,由基本方程(2.4.18)可以积分出 $\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 来,即这样的 g_{ij} 与 b_{ij} 才表示一个曲面.因此(2.4.19)式与(2.4.22)式也可以看做是方程(2.4.18)的可积性条件.

五、曲面上的曲线,测地曲率与测地线

只要把曲面的两个参数 u^1,u^2 表示为另外一个参数 t 的函数,即可描述一条在曲面上的曲线,即只要给出

$$u^i = u^i(t) \quad (i = 1,2),$$

将这个关系代入曲面的参数方程中即得到曲面上曲线的参数方程:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1,u^2) = \boldsymbol{r}(u^1(t),u^2(t)) = \boldsymbol{r}(t). \qquad (2.4.23)$$

对 $\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 沿曲线求导数,得到切向量

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_1\dot{u}^1 + \boldsymbol{r}_2\dot{u}^2 = \boldsymbol{r}_i\dot{u}^i, \qquad (2.4.24)$$

再求一次导数,得

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{r}_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \boldsymbol{r}_i\ddot{u}^i \\ &= (\Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \ddot{u}^k)\boldsymbol{r}_k + b_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j\boldsymbol{n}.\end{aligned} \qquad (2.4.25)$$

若记

$$\ddot{\boldsymbol{r}}^t = (\Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \ddot{u}^k)\boldsymbol{r}_k, \qquad (2.4.26)$$

则 $\ddot{\boldsymbol{r}}^t$ 表示 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 在曲面的切平面内的投影向量.将曲线的切向量与之作外积,得

$$\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}^t = (\boldsymbol{r}_1\wedge\boldsymbol{r}_2)[\dot{u}^1(\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j) - \dot{u}^2(\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)]. \qquad (2.4.27)$$

我们知道,$\ddot{\boldsymbol{r}}^t$ 是在曲面的切平面内的,它在切平面内又可分解为曲线的切线方向和曲线法平面与曲面切平面的交线方向(也称为曲线的法向)两个部分.在(2.4.27)式中,当 $\ddot{\boldsymbol{r}}^t$ 与曲线的切

向量作外积后，只有曲线在曲面切平面中的法向部分上的分量在起作用，因而(2.4.27)式就刻画了曲线在曲面内的弯曲性质，它的长度称为曲线的**测地曲率**：

$$\kappa_g = \frac{\|\dot{\boldsymbol{r}}\wedge\ddot{\boldsymbol{r}}^t\|}{|\dot{s}^3|} = \frac{\sqrt{g}}{|\dot{s}^3|}\left|\dot{u}^1(\ddot{u}^2+\Gamma_{ij}^2\dot{u}^i\dot{u}^j)-\dot{u}^2(\ddot{u}^1+\Gamma_{ij}^1\dot{u}^i\dot{u}^j)\right|$$

$$= \sqrt{g}\left|\frac{\mathrm{d}u^1}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^2}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma_{ij}^2\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)-\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}^2u^1}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma_{ij}^1\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}u^j}{\mathrm{d}s}\right)\right|, \tag{2.4.28}$$

这里 s 表示曲线的弧长参数.

如果曲面上某条曲线的测地曲率 $\kappa_g=0$，则称该曲线为曲面的**测地线**，它在曲面内是没有弯曲的，只有伴随曲面的弯曲而产生的弯曲.

六、曲面上的曲线坐标网

以上对曲面的讨论都是在曲面上一般的局部坐标中进行的，曲面的参数 u^i 是任意选取的. 在实际应用中，我们当然不必对一般的坐标参数来进行计算，而常常是采用一些比较特殊的曲线坐标网. 我们现在就来讨论这些曲线坐标网.

1. 正交曲线坐标网

设曲面上有一任意给定的曲线坐标网$\{u^i\}$，在曲面上的某点给定两个微方向：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}:(\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2)\quad 和 \quad \delta\boldsymbol{r}:(\delta u^1,\delta u^2),$$

则它们互相正交的条件是

$$g_{ij}\,\mathrm{d}u^i\delta u^j = 0. \tag{2.4.29}$$

设给定了曲面上的一族曲线

$$\varphi(u^1,u^2) = C^1, \tag{2.4.30}$$

这族曲线的切方向是

$$\frac{\delta u^1}{\delta u^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}. \tag{2.4.31}$$

现在要寻求处处与这族曲线正交的另一族曲线. 设这族新曲线的微切向量是 $\mathrm{d}u^i$，则把(2.4.31)式所给出的方向代入(2.4.29)式我们得到

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}g_{11}-\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}g_{12}\right)\mathrm{d}u^1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}g_{12}-\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}g_{22}\right)\mathrm{d}u^2=0. \tag{2.4.32}$$

这是一组关于 u^1,u^2 的微分方程，积分这组方程就得到另一族曲线：

$$\psi(u^1,u^2)=C^2. \tag{2.4.33}$$

由方程(2.4.30)与(2.4.33)可得，如果以 C^1 与 C^2 作为新的参数，则

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=\boldsymbol{r}(C^1,C^2).$$

可以证明，在曲线坐标网$\{C^1,C^2\}$中，有

$$g_{12}=0.$$

反过来，如果 $g_{12}=0$，则曲线网的两个方向$(\mathrm{d}u^1,0)$与$(0,\mathrm{d}u^2)$是正交的. 因此我们说，曲面的曲线坐标网$\{u^1,u^2\}$正交的充分必要条件是这组坐标的 $g_{12}=0$.

2. 共轭曲线坐标网

若前面定义的方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与 $\delta\boldsymbol{r}$ 之间满足

$$b_{ij}\mathrm{d}u^i\delta u^j=0, \tag{2.4.34}$$

即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0, \tag{2.4.35}$$

则我们称这两个方向为**相互共轭**的.

设有一族曲线：

$$\varphi(u^1,u^2)=C^1, \tag{2.4.36}$$

则该曲线族的**共轭曲线族**定义为每一点的切向量与该曲线族均共轭的曲线族，因而它必然满足

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}b_{11}-\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}b_{12}\right)\mathrm{d}u^1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}b_{12}-\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}b_{22}\right)\mathrm{d}u^2=0. \tag{2.4.37}$$

假设积分上式得

$$\psi(u^1,u^2)=C^2. \tag{2.4.38}$$

若令 C^1 与 C^2 为新的坐标参数,则在新的坐标中有

$$b_{12}=0.$$

同样,这个条件是曲线坐标网共轭的充分必要条件.

3. 曲率线坐标网

重新来考虑(2.4.11)式:

$$\kappa_n g_{ij}\mathrm{d}u^j-b_{ij}\mathrm{d}u^j=0.$$

将两个主曲率值 κ_1 和 κ_2 分别代入,则上式均只有一个独立的方程. 这时积分此方程,对应于两个主曲率我们得到两个不同的曲线族. 在讨论曲率的性质时,我们曾证明这两族曲线在两个主曲率不全相同时,曲线族的切向量是相互正交的,并且还是相互共轭的. 这也就是说,这两族曲线的切向量均是曲面的主方向. 这样的曲线也称为**曲率线**.

容易证明,曲线坐标网是曲率线坐标网的充分必要条件是 $b_{12}=0$,且 $g_{12}=0$.

4. 渐近线坐标网

对于曲面上的方向 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$:$(\mathrm{d}u^1,\mathrm{d}u^2)$,如果它满足

$$\mathrm{II}=b_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j=0, \tag{2.4.39}$$

则这样的方向称为曲面上的**渐近方向**,即该方向是"自共轭"方向. 每一点的切向量都满足方程(2.4.39)的曲线称为曲面的**渐近线**. 由(2.4.39)式的判别式

$$\Delta=b_{12}^2-b_{11}b_{22} \tag{2.4.40}$$

得到:对于由椭圆点组成的曲面,有 $\Delta<0$,这时方程(2.4.39)无实方向的解;若曲面由双曲点组成,则有两个不同的实方向;对于由抛物点组成的曲面,有一个实方向. 这也就是说,对于由椭圆点组成的曲面,没有渐近线;而由双曲点或抛物点组成的曲面,前者有两族渐近线,而后者有一族渐近线.

当在由双曲点组成的曲面上，以其两族渐近线组成曲面上的坐标网时，我们有

$$b_{11} = b_{22} = 0. \tag{2.4.41}$$

同样可以证明这个式子也是曲线坐标网为渐近线坐标网的充分必要条件.

从渐近方向的定义可知，沿着渐近方向有 $d^2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}=0$. 因此渐近线的主法向在曲面的切平面内，同时沿渐近方向的曲面法曲率为零.

5. 等温坐标网

我们通过如下的定理来引进曲面上的等温坐标网：

定理 2.4　如果曲面的第一标形的系数矩阵(g_{ij})是 u^i 的解析函数，则可以引进新的坐标参数 v^i，使得曲面的第一标形为

$$\mathrm{I} = ds^2 = \lambda(v^1, v^2)[(dv^1)^2 + (dv^2)^2]. \tag{2.4.42}$$

这样的曲线坐标网称为**等温坐标网**，或称为**保角坐标网**.

证明　记曲面的第一标形为

$$ds^2 = E(du^1)^2 + 2F du^1 du^2 + G(du^2)^2.$$

将这个二次型进行因式分解. 由于它的判别式 $EG-F^2>0$，因而不可能进行实分解，只能进行如下的复分解：

$$ds^2 = \left(\sqrt{E}du^1 + \frac{F+i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}du^2\right) \cdot \left(\sqrt{E}du^1 + \frac{F-i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}du^2\right),$$

这里 $g=EG-F^2$.

如果我们能找到一组新的坐标，即找到积分因子 μ，使得

$$\sqrt{E}du^1 + \frac{F+i\sqrt{g}}{\sqrt{E}}du^2 = \mu(dv^1 + i dv^2), \tag{2.4.43}$$

则有

$$ds^2 = \mu\bar{\mu}[(dv^1)^2 + (dv^2)^2] = \lambda(v^1, v^2)[(dv^1)^2 + (dv^2)^2],$$

即定理的结论成立. 为此，我们只要证明方程(2.4.43)式是有解的.

将(2.4.43)式中 $v^1(u^1, u^2)$ 和 $v^2(u^1, u^2)$ 的微分表成 du^1 与

du^2 的形式，由于 du^1 与 du^2 在曲面上是独立的，因而我们得到

$$\begin{cases}\mu\left(\dfrac{\partial v^1}{\partial u^1}+\mathrm{i}\,\dfrac{\partial v^2}{\partial u^1}\right)=\sqrt{E},\\[2mm] \mu\left(\dfrac{\partial v^1}{\partial u^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{\partial v^2}{\partial u^2}\right)=\dfrac{F+\mathrm{i}\sqrt{g}}{\sqrt{E}}.\end{cases}$$

从这两个式子中消去 μ，我们有

$$\sqrt{E}\left(\frac{\partial v^1}{\partial u^2}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v^2}{\partial u^2}\right)=\frac{F+\mathrm{i}\sqrt{g}}{\sqrt{E}}\left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v^2}{\partial u^1}\right).$$

由于 v^1 与 v^2 均要求是实值坐标，因而可以将上式的虚部与实部分开得到如下两组方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v^1}{\partial u^1}=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\left(-F\dfrac{\partial v^2}{\partial u^1}+E\dfrac{\partial v^2}{\partial u^2}\right),\\[2mm] \dfrac{\partial v^1}{\partial u^2}=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\left(-G\dfrac{\partial v^2}{\partial u^1}+F\dfrac{\partial v^2}{\partial u^2}\right)\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial v^2}{\partial u^1}=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\left(F\dfrac{\partial v^1}{\partial u^1}-E\dfrac{\partial v^1}{\partial u^2}\right),\\[2mm] \dfrac{\partial v^2}{\partial u^2}=\dfrac{1}{\sqrt{g}}\left(G\dfrac{\partial v^1}{\partial u^1}-F\dfrac{\partial v^1}{\partial u^2}\right).\end{cases}\tag{2.4.44}$$

由于 v^1 和 v^2 对 u^i 的二阶导数可以交换顺序，因此由(2.4.44)式我们得到

$$\begin{cases}Lv^1=0,\\ Lv^2=0,\end{cases}\tag{2.4.45}$$

式中算子 L 为

$$L=\frac{\partial}{\partial u^1}\left[\frac{F\dfrac{\partial}{\partial u^2}-G\dfrac{\partial}{\partial u^1}}{\sqrt{EG-F^2}}\right]+\frac{\partial}{\partial u^2}\left[\frac{F\dfrac{\partial}{\partial u^1}-E\dfrac{\partial}{\partial u^2}}{\sqrt{EG-F^2}}\right].\tag{2.4.46}$$

算子 L 在数学物理中称为 **Beltrami**[①] **算子**，它是一个二阶微分算子，其二次项的系数的判别式总是大于零的，因而是一个椭圆型算子. 因此，在适当的边条件下，方程(2.4.45)总是有解的. 这样就证

---

① E. Beltrami(1835—1900)，意大利数学家、力学家.

明了我们的定理. ▌

另外,可以求出:

$$\lambda=\mu\bar{\mu}=\frac{g}{G\left(\frac{\partial v^1}{\partial u^1}\right)^2-2F\frac{\partial v^1}{\partial u^1}\frac{\partial v^1}{\partial u^2}+E\left(\frac{\partial v^1}{\partial u^2}\right)^2}$$

$$=\frac{g}{G\left(\frac{\partial v^2}{\partial u^1}\right)^2-2F\frac{\partial v^2}{\partial u^1}\frac{\partial v^2}{\partial u^2}+E\left(\frac{\partial v^2}{\partial u^2}\right)^2}. \tag{2.4.47}$$

利用曲面上的 Gauss 公式(2.4.19),可以求出曲面在等温坐标下的 Gauss 曲率为

$$\kappa=-\frac{1}{2\lambda}\Delta\ln\lambda=-\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{\partial^2}{(\partial v^1)^2}+\frac{\partial^2}{(\partial v^2)^2}\right]\ln\lambda. \tag{2.4.48}$$

6. 等温共轭坐标网

类似于对曲面的第一标形的讨论,对于具有正 Gauss 曲率的曲面,可以找到曲线坐标网 v^i,使得

$$\mathrm{II}=\mu(v^1,v^2)[(\mathrm{d}v^1)^2+(\mathrm{d}v^2)^2]. \tag{2.4.49}$$

如果曲面是具有负 Gauss 曲率的,可以选取渐近线坐标网 u^i,使得

$$\mathrm{II}=2b_{12}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2. \tag{2.4.50}$$

若再令

$$\begin{cases}u^1=\varphi(v^1+v^2),\\ u^2=\psi(v^1-v^2),\end{cases} \tag{2.4.51}$$

则可以得到

$$\mathrm{II}=\mu(v^1,v^2)[(\mathrm{d}v^1)^2-(\mathrm{d}v^2)^2]. \tag{2.4.52}$$

具有形如(2.4.49)式或(2.4.52)式的第二标形的曲线坐标网称为曲面的**等温共轭坐标网**.

7. 半测地曲线坐标网

在前面的讨论中,我们定义了曲面的测地曲线,即每一点上的测地曲率均为零的曲线. 于是,由(2.4.28)式,对于测地曲线,有

$$\dot{u}^1(\ddot{u}^2+\Gamma_{ij}^2\dot{u}^i\dot{u}^j)-\dot{u}^2(\ddot{u}^1+\Gamma_{ij}^1\dot{u}^i\dot{u}^j)=0. \tag{2.4.53}$$

这个方程是一个二阶常微分方程，所以当给定了曲面上一初始点的位置并给定这一点上曲面的切方向后，总可以找到一条测地线经过该点并与给定的方向相切.

有了上面的说明后，我们来考虑曲面上的测地线族. 设在曲面上有一光滑曲线，在曲线的每一点给定一个曲面的切方向，并且这些切方向在曲线上光滑变化，则在这条曲线的每一点上由该点及给定的方向均可以确定出一条曲面的测地线. 由此在整条曲线上就给出了曲面的一个测地曲线族.

按照前面讲过的方法，给出这族测地曲线的正交曲线族，就可以得到一组正交曲线网. 设 u^i 是这种曲线网，则由其正交性，第一标形具有如下形式：

$$\mathrm{I}=g_{11}(\mathrm{d}u^1)^2+g_{22}(\mathrm{d}u^2)^2.$$

设曲线族 $u^2=\mathrm{const}$ 是曲面的测地线族，将这个条件代入方程(2.4.53)中，由于有 $\dot{u}^2=\ddot{u}^2=0$，因此有

$$\Gamma_{11}^2=-\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}=0.$$

这个关系表明度量系数 g_{11} 只是 u^1 的函数. 由这个结论，我们令

$$\begin{cases}\mathrm{d}v^1=\sqrt{g_{11}}\,\mathrm{d}u^1,\\ v^2=u^2,\end{cases} \tag{2.4.54}$$

则在这组新的坐标下，曲面的第一标形变为

$$\mathrm{I}=(\mathrm{d}v^1)^2+g_{22}(\mathrm{d}v^2)^2. \tag{2.4.55}$$

如果我们对曲面上的某条曲线 $v^1=v_0^1$ 特别感兴趣，可以引进如下变量代换：

$$\mathrm{d}\tilde{v}^2=\sqrt{g_{22}(v_0^1,v^2)}\,\mathrm{d}v^2. \tag{2.4.56}$$

这时，

$$\mathrm{I}=(\mathrm{d}v^1)^2+\tilde{g}_{22}(v^1,\tilde{v}^2)(\mathrm{d}\tilde{v}^2)^2. \tag{2.4.57}$$

当 $v^1=v_0^1$ 时，$\tilde{g}_{22}=1$，也就是说这时曲面上的度量与平面上是一致的. 这样的曲线坐标网称为曲面的**半测地曲线坐标网**.

若测地线族是由同一点沿不同的方向而取到的，则这样的半测地坐标称为**测地极坐标**. 这时 v^1 表示从原点 $v_0^1=0$ 出发的测地线的弧长. 由于在原点不同的 $\mathrm{d}v^2$ 应给出同一个 Ⅰ 的值，因此有 $g_{22}(0,v^2)=0$. 此时，从(2.4.55)式出发，作变量替换

$$\mathrm{d}\tilde{v}^2=\frac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial v^1}(0,v^2)\mathrm{d}v^2, \tag{2.4.58}$$

则第一标形变为

$$\mathrm{I}=(\mathrm{d}v^1)^2+(v^1)^2\tilde{g}_{22}(v^1,\tilde{v}^2)(\mathrm{d}\tilde{v}^2)^2. \tag{2.4.59}$$

在坐标原点 $v^1=0$ 附近，有

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{22}&=\left[\frac{\sqrt{g_{22}}}{v^1\dfrac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial v^1}(0,v^2)}\right]^2\\&=\left[\frac{\sqrt{g_{22}(0,v^2)}+\dfrac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial v^1}(0,v^2)v^1+\cdots}{v^1\dfrac{\partial\sqrt{g_{22}}}{\partial v^1}(0,v^2)}\right]^2\\&=1+O(v^1).\end{aligned} \tag{2.4.60}$$

从(2.4.59)式和(2.4.60)式可以看出，坐标 v^1 相应于极坐标中的极矩，而 $\tilde{v}^2$ 相应于幅角.

在半测地坐标中，v^1 族曲线即 $v^2=\text{const}$ 的曲线是测地线，v^2 族曲线即 $v^1=\text{const}$ 的曲线是测地平行线，而在测地极坐标中，v^1 族曲线是测地线，v^2 族曲线为测地平行圆.

§2.5 曲面的无限小弯曲

一、曲面的弯曲变形与无限小弯曲

我们知道曲面的第一标形刻画了曲面上的度量性质，第二标形刻画了曲面的弯曲性质. 若这两个标形均不变化，则曲面的形状

是完全确定的. 现在要考虑的问题是：如果保持曲面的度量性质不变，而对曲面进行变形会有些什么样的规律？曲面的这种变形称为**纯弯曲变形**，也称为**弯曲变形**.

若我们考虑的曲面弯曲变形是无限小的，即变形前后的曲面的差别是可以任意小，则这种弯曲变形称为曲面的**无限小弯曲**.

设 $\boldsymbol{r}$ 表示 $\mathscr{E}^3$ 中的一曲面，而 $\boldsymbol{u}$ 表示曲面上的位移. 曲面变形后在 $\mathscr{E}^3$ 中的位置变为 $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}$. 如果该变形是纯弯曲变形，则度量性质不变，我们有

$$\tilde{g}_{ij} = (\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{u}_i) \cdot (\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{u}_j) = g_{ij} = \boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_j.$$

故对于纯弯曲变形 $\boldsymbol{u}$，有

$$\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j = 0. \tag{2.5.1}$$

若曲面上的变形是无限小弯曲，则有关位移 $\boldsymbol{u}$ 的二次项均可略去，因此

$$\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{u}_i = 0. \tag{2.5.2}$$

这个关系就是曲面的无限小弯曲应满足的条件. 对于 $\mathscr{E}^3$ 中的曲面，其无限小弯曲的性质，可以由下面的两个定理来刻画.

定理 2.5 对于曲面的无限小弯曲，存在向量场 $\boldsymbol{\Omega}$，使位移场有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{2.5.3}$$

证明 设曲面的方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(v^1,v^2)$，而位移为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(v^1,v^2)$，则我们有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_i \mathrm{d}v^i, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i \mathrm{d}v^i.$$

取曲面上的法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{r}_2}{\sqrt{g}}$，则 $\boldsymbol{u}_i$ 在标架$(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{n})$上的分解为

$$\boldsymbol{u}_i = \gamma_i^j \boldsymbol{r}_j + \omega_i \boldsymbol{n}, \tag{2.5.4}$$

其中 $\gamma_i^j, \omega_i \in \mathbb{R}\ (i,j=1,2)$. 将上式与 $\boldsymbol{r}_k$ 作内积，并将曲面无限小弯曲的条件(2.5.2)式代入，有

$$\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{u}_i = \gamma_i^j g_{jk} + \gamma_k^j g_{ji} = 0, \tag{2.5.5}$$

上式中一共有三个独立的表达式. 若记 $\boldsymbol{\Omega}=\Omega^1\boldsymbol{r}_1+\Omega^2\boldsymbol{r}_2+\Omega^3\boldsymbol{n}$，则有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= (\Omega^1 \boldsymbol{r}_1 + \Omega^2 \boldsymbol{r}_2 + \Omega^3 \boldsymbol{n}) \times (\boldsymbol{r}_1 \mathrm{d}v^1 + \boldsymbol{r}_2 \mathrm{d}v^2) \\
&= \left[-\sqrt{g}\, \Omega^2 \boldsymbol{n} + \frac{1}{\sqrt{g}} \Omega^3 (-g_{12} \boldsymbol{r}_1 + g_{11} \boldsymbol{r}_2) \right] \mathrm{d}v^1 \\
&\quad + \left[\sqrt{g}\, \Omega^1 \boldsymbol{n} + \frac{1}{\sqrt{g}} \Omega^3 (-g_{22} \boldsymbol{r}_1 + g_{12} \boldsymbol{r}_2) \right] \mathrm{d}v^2,
\end{aligned} \tag{2.5.6}
$$

在上式的叉乘运算中用到了

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{g}} (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{g}} (-g_{12} \boldsymbol{r}_1 + g_{11} \boldsymbol{r}_2), \\
\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{r}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{g}} (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{r}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{g}} (-g_{22} \boldsymbol{r}_1 + g_{12} \boldsymbol{r}_2).
\end{cases} \tag{2.5.7}
$$

由于无限小弯曲变形有性质(2.5.5)式，则当我们令

$$
\Omega^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \omega_2, \quad \Omega^2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \omega_1, \quad \Omega^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \gamma_1^i g_{i2} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \gamma_2^i g_{i1} \tag{2.5.8}
$$

时，由(2.5.5)式和(2.5.8)式中的第三式可求得

$$
\begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 \end{pmatrix} = \frac{\Omega^3}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} -g_{12} & g_{11} \\ -g_{22} & g_{12} \end{pmatrix}. \tag{2.5.9}
$$

最后将(2.5.9)式代回到(2.5.6)式中，有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= (\omega_1 \boldsymbol{n} + \gamma_1^1 \boldsymbol{r}_1 + \gamma_1^2 \boldsymbol{r}_2) \mathrm{d}v^1 + (\omega_2 \boldsymbol{n} + \gamma_2^1 \boldsymbol{r}_1 + \gamma_2^2 \boldsymbol{r}_2) \mathrm{d}v^2 \\
&= \boldsymbol{u}_i \mathrm{d}v^i = \mathrm{d}\boldsymbol{u},
\end{aligned}
$$

即通过(2.5.8)式定义的 $\boldsymbol{\Omega}$ 使得(2.5.3)式成立. ▌

定理 2.6 设曲面是由椭圆点组成的，即

$$
b_{11} b_{22} - b_{12}^2 > 0, \tag{2.5.10}
$$

则曲面的无限小弯曲满足

$$
\delta b_{11} \delta b_{22} - (\delta b_{12})^2 \leqslant 0, \tag{2.5.11}
$$

且等号成立当且仅当 $\delta b_{ij} = 0$.

证明 利用曲面的 Gauss 方程，由于曲面的无限小弯曲的第

一标形是不变的，因而曲面的 Gauss 曲率不变. 由此得知，对于曲面的无限小弯曲，变形前后的 $b_{11}b_{22}-b_{12}^2$ 是一样的. 设由于曲面的无限小弯曲，第二标形由 b_{ij} 变为 $b_{ij}+\delta b_{ij}$，则

$$(b_{11}+\delta b_{11})(b_{22}+\delta b_{22})-(b_{12}+\delta b_{12})^2=b_{11}b_{22}-b_{12}^2.$$

化简此式，并略去 δb_{ij} 的二次项，得

$$b_{11}\delta b_{22}+b_{22}\delta b_{11}-2b_{12}\delta b_{12}=0, \tag{2.5.12}$$

再移项后平方得

$$b_{11}^2(\delta b_{22})^2+b_{22}^2(\delta b_{11})^2+2b_{11}b_{22}\delta b_{11}\delta b_{22}=4b_{12}^2(\delta b_{12})^2.$$

上式两边减去 $4b_{11}b_{22}\delta b_{11}\delta b_{22}$，即有

$$\begin{aligned}0&\leqslant(b_{11}\delta b_{22}-b_{22}\delta b_{11})^2=4b_{12}^2(\delta b_{12})^2-4b_{11}b_{22}\delta b_{11}\delta b_{22}\\&\leqslant 4b_{11}b_{22}[(\delta b_{12})^2-\delta b_{11}\delta b_{22}].\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

由于 $b_{11}b_{22}>b_{12}^2\geqslant 0$，从上式立即推出(2.5.11)式成立.

若 $\delta b_{ij}=0$，则(2.5.11)式中等号成立. 反过来，若(2.5.11)式中等号成立，则由(2.5.13)式可得出

$$b_{11}\delta b_{22}-b_{22}\delta b_{11}=0. \tag{2.5.14}$$

将这个条件与(2.5.12)式联立代入 $\delta b_{11}\delta b_{22}-(\delta b_{12})^2=0$ 中，可得

$$\frac{1}{b_{11}b_{22}}(\delta b_{12})^2(b_{12}^2-b_{11}b_{22})=0,$$

于是由已知条件可知 $\delta b_{12}=0$. 最后由上式及(2.5.12)与(2.5.14)两式可得

$$\delta b_{11}=\delta b_{22}=0,$$

即 $\delta b_{ij}=0$ 成立，这样就全部证明了定理. ▌

二、卵形曲面的刚硬性

现在来考虑一个由椭圆点组成的闭曲面，即所谓的**卵形面**的性质.

定理 2.7 设光滑闭曲面 $\mathscr{S}$ 由椭圆点组成，曲面受无限小弯曲后也是光滑的，则它的无限小弯曲满足 $\delta b_{ij}=0$，即无限小弯曲只可能是刚体运动.

证明 同样用δ表示经过变形后曲面上几何量的改变，由定理2.5有

$$\begin{cases}\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}, \\ \delta \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}.\end{cases}$$

考虑到曲面的度量在弯曲时不变，曲面法向量的改变为

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{n} &= \delta\left(\frac{\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2}{\sqrt{g}}\right) = \frac{\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{u}_2}{\sqrt{g}} \\ &= \frac{(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_2)}{\sqrt{g}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n},\end{aligned} \tag{2.5.15}$$

曲面第二标形的改变为

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{II} &= \delta(\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}) = -\delta(\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n}) \\ &= -(\boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{n} - \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}) \\ &= -(\mathrm{d}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{n}) - \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{n}) \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}).\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

把上式写成分量形式得

$$\delta b_{ij} = \boldsymbol{\Omega}_i \cdot (\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\Omega}_j \cdot (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{n}). \tag{2.5.17}$$

由 $\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，对曲面$\mathscr{S}$上任意闭曲线$\gamma$及其围成的部分曲面$\mathscr{D}$，有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{D}} (\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_2) \mathrm{d}v^1 \mathrm{d}v^2 &= \iint_{\mathscr{D}} \left[\frac{\partial}{\partial v^2}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_1) - \frac{\partial}{\partial v^1}(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}_2)\right] \mathrm{d}v^1 \mathrm{d}v^2 \\ &= \oint_\gamma \boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

因为$\mathscr{D}$是任意取定的，所以有

$$\boldsymbol{\Omega}_2 \times \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{r}_2. \tag{2.5.18}$$

由此还可得到

$$\begin{aligned}\sqrt{g}\,(\boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \boldsymbol{n}) &= \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{\Omega}_1) \\ &= \boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2) = \boldsymbol{\Omega}_2 \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_1) = 0,\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{\Omega}_i \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad (i = 1,2). \tag{2.5.19}$$

由(2.5.17)式我们得到

$$\begin{aligned}
&\delta b_{11}\delta b_{22} - (\delta b_{12})^2 \\
&\quad = [\boldsymbol{\Omega}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n})] \cdot [\boldsymbol{\Omega}_2 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n})] \\
&\qquad - [\boldsymbol{\Omega}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n})] \cdot [\boldsymbol{\Omega}_2 \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n})] \\
&\quad = \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \{(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n})[\boldsymbol{\Omega}_2 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n})] - (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n})[\boldsymbol{\Omega}_2 \cdot (\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n})]\} \\
&\quad = \boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \{\boldsymbol{\Omega}_2 \times [(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n}) \times (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n})]\} \\
&\quad = [(\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{n}) \times (\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{n})] \cdot (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2) \\
&\quad = \sqrt{g}\,\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2).
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

利用(2.5.18)和(2.5.19)两式,从上式可得

$$\begin{aligned}
&\frac{2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{\sqrt{g}}[\delta b_{11}\delta b_{22} - (\delta b_{12})^2] \\
&\quad = 2(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}) \cdot [\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2)] \\
&\quad = 2\boldsymbol{r} \cdot \{\boldsymbol{n}[\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2)]\} \\
&\quad = 2\boldsymbol{r} \cdot \{\boldsymbol{n} \times [\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2)] + (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2) \cdot (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n})\} \\
&\quad = 2\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_2) \\
&\quad = \frac{\partial}{\partial v^1}[\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}_2)] - \frac{\partial}{\partial v^2}[\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}_1)].
\end{aligned}$$

此式在闭曲面 $\mathscr{S}$ 上积分得

$$\iint_{\mathscr{S}} \frac{2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{\sqrt{g}}[\delta b_{11}\delta b_{22} - (\delta b_{12})^2]\mathrm{d}v^1\mathrm{d}v^2 = \oint_{\mathscr{B}_0} \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}) = 0. \tag{2.5.21}$$

上式积分为零是因为闭曲面的边界曲线 $\mathscr{B}_0$ 是空集.

在(2.5.21)式中,根据定理 2.6 知,被积函数中 $\delta b_{11}\delta b_{22} - (\delta b_{12})^2 \leqslant 0$. 而当在 $\mathscr{E}^3$ 中的坐标原点取在闭曲面 $\mathscr{S}$ 内时,由于曲面的凸性,被积函数的其余部分 $\dfrac{2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{\sqrt{g}} > 0$. 合起来我们知道(2.5.21)式的被积函数是一个非正函数,其积分为零的充分必要条件是被积函数在曲面上等于零. 也就是说,我们有

$$\delta b_{11}\delta b_{22} - (\delta b_{12})^2 = 0.$$

再由定理 2.6 的结论知，这就是 $\delta b_{ij}=0$ 的充分必要条件. 这样就证明了定理的结论. ▌

上述卵形面的刚硬性是曲面论中一个带有整体性质的定理. 在定理 2.7 的条件中，实际上凸性条件是自然满足的，即由椭圆点组成的光滑闭曲面必然是凸的. 这个性质称为卵形面的 **Hadamard**① **特征**，它也是整体微分几何中的一个重要性质.

另外，需要说明的是，如果凸曲面不是封闭的，存在边界 $\mathscr{B}_0$，则只要假设曲面的边界上没有变形 $\boldsymbol{u}$，定理的结论仍然成立，因为这时公式(2.5.21)中的线积分仍然是为零的.

以上的结论启示我们，在结构力学中，当薄壳结构中面是凸曲面，边界又充分固定时，如果略去曲面的度量变形，则曲面是刚性的，即没有纯弯曲. 实践中证明，这样的结构具有较好的承载能力.

§2.6　几种特殊曲面

一、直纹面与可展曲面

直纹面与可展曲面是两类常见的曲面，这里对它们的特性作一些讨论.

定义 2.5　在三维欧氏空间 $\mathscr{E}^3$ 中，如果曲面的方程由

$$\boldsymbol{r}(u^1,u^2)=\boldsymbol{a}(u^2)+u^1\boldsymbol{b}(u^2) \tag{2.6.1}$$

给出，其中 $\boldsymbol{a}(u^2)$ 与 $\boldsymbol{b}(u^2)$ 是两个向量，则这样的曲面称为**直纹面**.

在上面的定义中，$\boldsymbol{a}(u^2)$ 称为曲面的**导线**或**基线**. 对每一个 u^2，通过点 $\boldsymbol{a}(u^2)$ 并平行于向量 $\boldsymbol{b}(u^2)$ 的直线称为直纹面的**母线**. 特别地，当 $\boldsymbol{b}(u^2)=\text{const}$ 时，直纹面为柱面；而当 $\boldsymbol{a}(u^2)=\text{const}$ 时，则构成锥面. 在下面的讨论中，为了方便起见，我们均假设 $\boldsymbol{b}(u^2)$ 为一个单位向量.

---

① Hadamard(1865—1963)，法国数学家.

有了直纹面的定义，就可以利用§2.4中的一些公式来讨论它的度量性质与弯曲性质.

首先，我们有

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{b}, \\ \boldsymbol{r}_2 = \dot{\boldsymbol{a}} + u^1 \dot{\boldsymbol{b}}, \end{cases}$$

其中在向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 上的点表示对 u^2 的微商. 由此，度量系数为

$$\begin{cases} g_{11} = 1, \\ g_{12} = \dot{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{b}, \\ g_{22} = \dot{\boldsymbol{a}} \cdot \dot{\boldsymbol{a}} + 2u^1 (\dot{\boldsymbol{a}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}) + (u^1)^2 (\dot{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}), \end{cases} \tag{2.6.2}$$

而法向量为

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \boldsymbol{b} \times (\dot{\boldsymbol{a}} + u^1 \dot{\boldsymbol{b}}), \tag{2.6.3}$$

其中在(2.6.2)式的计算中使用了 $\|\boldsymbol{b}\| = 1$ 的条件. 进一步，曲面的第二标形的系数为

$$\begin{cases} b_{11} = 0, \\ b_{12} = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dot{\boldsymbol{b}} \cdot (\boldsymbol{b} \times \dot{\boldsymbol{a}}), \\ b_{22} = \dfrac{1}{\sqrt{g}} (\ddot{\boldsymbol{a}} + u^1 \ddot{\boldsymbol{b}}) \cdot [\boldsymbol{b} \times (\dot{\boldsymbol{a}} + u^1 \dot{\boldsymbol{b}})]. \end{cases} \tag{2.6.4}$$

由上面的结果很容易计算直纹面的 Gauss 曲率：

$$\kappa = -\frac{1}{g^2} [\dot{\boldsymbol{a}} \cdot (\boldsymbol{b} \times \dot{\boldsymbol{b}})]^2 \leqslant 0. \tag{2.6.5}$$

由此可见，直纹面的 Gauss 曲率总是非正的.

一般地，由 Ⅱ $=0$ 可以得到两族渐近线：一族渐近线是

$$\mathrm{d}u^2 = 0,$$

而另一族渐近线为

$$2b_{12}\mathrm{d}u^1 + b_{22}\mathrm{d}u^2 = 0.$$

可见，当 $b_{12}=0$ 时，这两族渐近线是一样的. 其中一族渐近线 $u^2 =$ const 是曲面上的直线，由此它必然是曲面的测地线. 由§2.4中的

讨论知，这时有 $\Gamma_{11}^{2}=0$. 若存在另一族渐近线也是曲面上的直线，则用这两族直线作为曲面的坐标参数网时，必有 $\Gamma_{11}^{2}=\Gamma_{22}^{1}=0$. 这时可以证明曲面必为二次曲面(单叶双曲面).

Gauss 曲率恒为零的直纹面称为**可展曲面**. 对于可展曲面，有

$$\dot{\boldsymbol{a}} \cdot (\boldsymbol{b} \times \dot{\boldsymbol{b}}) = 0, \tag{2.6.6}$$

即

$$(\dot{\boldsymbol{a}} \cdot \dot{\boldsymbol{a}})(\dot{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}) - (\dot{\boldsymbol{a}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}})^2 - (\dot{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{b})^2(\dot{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}) = 0. \tag{2.6.7}$$

如果取可展曲面的导线和母线正交，即令

$$g_{12} = \dot{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{b} = 0,$$

考虑到(2.6.7)式，则可展曲面的第一标形变为

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= (\mathrm{d}u^1)^2 + (\dot{\boldsymbol{a}} + u^1\dot{\boldsymbol{b}}) \cdot (\dot{\boldsymbol{a}} + u^1\dot{\boldsymbol{b}})(\mathrm{d}u^2)^2 \\ &= (\mathrm{d}u^1)^2 + \left(\frac{\dot{\boldsymbol{a}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}}} + u^1\sqrt{\dot{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}}\right)^2 (\mathrm{d}u^2)^2. \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

若令

$$\bar{u}^2 = \int \frac{\dot{\boldsymbol{a}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}}{\sqrt{\dot{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}}}\mathrm{d}u^2 + u^1\int\sqrt{\dot{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}}\,\mathrm{d}u^2, \tag{2.6.9}$$

则可展曲面的第一标形变为

$$\mathrm{I} = (\mathrm{d}u^1)^2 + (\mathrm{d}\bar{u}^2)^2. \tag{2.6.10}$$

若 $\dot{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{b}}=0$，则令

$$\bar{u}^2 = \int\sqrt{\dot{\boldsymbol{a}} \cdot \dot{\boldsymbol{a}}}\,\mathrm{d}u^2, \tag{2.6.11}$$

仍可得到(2.6.10)式.

(2.6.10)式说明，对于可展曲面，可以经过坐标参数的代换使度量标形变为和平面一样. 这也就是曲面是“可展”的缘由. 它既然可以具有和平面一样的度量系数，那么它就可以经过纯弯曲变形变为平面.

二、旋转曲面

由一条平面曲线(也称为母线)绕与曲线在同一平面内的直线旋转而成的曲面称为**旋转曲面**.

如果旋转曲面的母线方程是

$$z = f(\rho), \tag{2.6.12}$$

则它的方程可写为

$$\boldsymbol{r} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, f(\rho)) = \boldsymbol{r}(\rho, \theta), \tag{2.6.13}$$

其中 ρ 是曲面上平行圆的半径,$\rho=$const 的一族曲线是曲面的平行圆,而 $\theta=$const 的曲线就是曲面的一条母线.

旋转曲面的两个标形是很容易计算的,我们把它留作练习,请读者自行完成.

三、平行曲面,曲面的焦曲面

对于一张已知曲面

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u^1, u^2), \tag{2.6.14}$$

定义如下的曲面 $\boldsymbol{r}^z$ 为其**平行曲面**:

$$\boldsymbol{r}^z = \boldsymbol{r}(u^1, u^2) + z\boldsymbol{n}(u^1, u^2). \tag{2.6.15}$$

从定义可以看出,平行曲面是距离原曲面为 $|z|$ 的一块曲面. 考虑原曲面是充分光滑的,则平行曲面的两个标形的系数为

$$\begin{aligned} g_{ij}^z &= \boldsymbol{r}_i^z \cdot \boldsymbol{r}_j^z = (\boldsymbol{r}_i + z\boldsymbol{n}_i) \cdot (\boldsymbol{r}_j + z\boldsymbol{n}_j) \\ &= g_{ij} + z(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{n}_j + \boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{n}_i) + z^2\boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{n}_j \\ &= g_{ij} - 2zb_{ij} + z^2 p_{ij}, \end{aligned} \tag{2.6.16}$$

这里

$$p_{ij} = \boldsymbol{n}_i \cdot \boldsymbol{n}_j = b_i^k b_j^l g_{kl} = 2Hb_{ij} - \kappa g_{ij}, \tag{2.6.17}$$

其中 H 和 κ 分别是原曲面(2.6.14)的平均曲率和 Gauss 曲率. 显然有

$$\boldsymbol{n}^z = \boldsymbol{n}, \tag{2.6.18}$$

由此有

$$b_{ij}^z = \boldsymbol{r}_{ij}^z \cdot \boldsymbol{n}^z = (\boldsymbol{r}_{ij} + z\boldsymbol{n}_{ij}) \cdot \boldsymbol{n} = b_{ij} - zp_{ij}. \quad (2.6.19)$$

现在我们考虑这样的问题：在什么时候平行曲面(2.6.15)上出现奇点？也就是讨论使得

$$g^z = g_{11}^z g_{22}^z - (g_{12}^z)^2 = 0 \quad (2.6.20)$$

的 z 值.利用(2.6.16)及(2.6.17)两式，经过计算可得(2.6.20)式为

$$g^z = (1 - 2zH + z^2\kappa)^2 g = 0. \quad (2.6.21)$$

方程(2.6.21)一般有两个实(重)根.这两个根就是原曲面的两个主曲率的倒数，即主曲率半径.由于 κ 和 H 在曲面上都是空间位置的函数，由此这两个实根也是 u^1, u^2 的函数，分别记做 $z_1(u^1, u^2)$ 与 $z_2(u^1, u^2)$.

我们将曲面(2.6.14)所有的奇点组成的集合所形成的曲面记做

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}^1 = \boldsymbol{r} + z_1\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{r} + z_2\boldsymbol{n}. \end{cases} \quad (2.6.22)$$

这两张曲面称为原曲面的**焦曲面**.

在(2.6.15)式中令 z 为变量 v^1，则以曲面(2.6.14)上的任一曲线 $u^i(v^2)$ 作为导线均可以做一个直纹面：

$$\widetilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(u^1(v^2), u^2(v^2)) + v^1\boldsymbol{n}(u^1(v^2), u^2(v^2)). \quad (2.6.23)$$

若取曲线为曲面(2.6.14)上的曲率线，容易验算有如下结论：

$$\dot{\boldsymbol{r}} \cdot (\boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{n}}) = 0. \quad (2.6.24)$$

这就是说，曲面(2.6.23)还是一张可展曲面.比较(2.6.23)与(2.6.22)两式知，可展曲面在 $v^1 = z_1$ 和 $v^2 = z_2$ 两点处分别与两张焦曲面相切.

四、伪球面与 Sine-Gordon 方程

在 Gauss 曲率为常数时，最简单的曲面是球面，这时 $\kappa = 1/a^2$，a 是球的半径.这是我们很熟悉的曲面.现在我们的兴趣转向 Gauss 曲率为负常数的曲面，即 $\kappa = -1/a^2$ 的曲面.这种曲面我们

称为**伪球面**.

一类重要的伪球面是旋转伪球面. 对于旋转伪球面,若令其方程为

$$\boldsymbol{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, f(\rho)), \tag{2.6.25}$$

易于计算它的 Gauss 曲率为

$$\kappa = \frac{f'(\rho) f''(\rho)}{\rho\{1+[f'(\rho)]^2\}^2}. \tag{2.6.26}$$

把 $\kappa=-\frac{1}{a^2}$代入上式,进行积分求解 $f(\rho)$可得

$$f(\rho) = \int\sqrt{\frac{b^2-\rho^2}{\rho^2+a^2-b^2}}\,\mathrm{d}\rho + c, \tag{2.6.27}$$

其中 b^2 与 c 均是积分常数.

(2.6.27)式在一般条件下积分较复杂,但当 $b=a$ 时,则易于积分得

$$f(\rho) = t - a\tanh\frac{t}{a}, \quad \rho = \frac{a}{\cosh\frac{t}{a}}. \tag{2.6.28}$$

这样我们就求得了一张旋转伪球面. 下一步我们要问: 对于非旋转的伪球面,一般说来应当有一些什么性质?

由于伪球面的 Gauss 曲率是负的,由此可以在曲面上取渐近线坐标网,使得在曲线坐标网上有 $b_{11}=b_{22}=0$,即第二标形为

$$\mathrm{II} = 2b_{12}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2. \tag{2.6.29}$$

由于 $\kappa=-\frac{1}{a^2}$,可得到

$$b_{12} = -\frac{1}{a}\sqrt{g}, \tag{2.6.30}$$

在这里开方取负号是为了今后计算方便. 将上述条件代入 Codazzi 方程,有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial u^1} = (\Gamma_{11}^1-\Gamma_{12}^2)\sqrt{g}, \\[2ex] \dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial u^2} = (-\Gamma_{21}^1+\Gamma_{22}^2)\sqrt{g}.\end{cases} \tag{2.6.31}$$

但是对一般曲面我们还有

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^j}. \tag{2.6.32}$$

把(2.6.31)与(2.6.32)两式联立起来,可得

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \tag{2.6.33}$$

再将上式展开,有

$$\begin{cases} -g_{12}g_{11,2} + g_{11}g_{22,1} = 0, \\ g_{22}g_{11,2} - g_{12}g_{22,1} = 0. \end{cases}$$

此齐次方程组的系数矩阵是正定的,所以只能有零解:

$$g_{11,2} = g_{22,1} = 0.$$

也就是说,我们有

$$\begin{cases} g_{11} = g_{11}(u^1), \\ g_{22} = g_{22}(u^2). \end{cases} \tag{2.6.34}$$

根据(2.6.34)式我们可以进行坐标参数的变换:

$$\begin{cases} v^1 = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \sqrt{g_{11}(u^1)}\,\mathrm{d}u^1, \\ v^2 = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \sqrt{g_{22}(u^2)}\,\mathrm{d}u^2. \end{cases} \tag{2.6.35}$$

在这组新的坐标参数下,曲面的第一和第二标形分别变为

$$\begin{cases} \mathrm{I} = a^2[(\mathrm{d}v^1)^2 + 2\tilde{g}_{12}\mathrm{d}v^1\mathrm{d}v^2 + (\mathrm{d}v^2)^2], \\ \mathrm{II} = 2\tilde{b}_{12}\mathrm{d}v^1\mathrm{d}v^2, \end{cases}$$

其中 $\tilde{b}_{12} = -\frac{1}{a}\sqrt{\tilde{g}}$. 由于

$$\tilde{g} = a^4(1 - \tilde{g}_{12}^2) > 0,$$

所以可以令

$$\tilde{g}_{12} = \cos\omega, \tag{2.6.36}$$

这样就有

$$\tilde{b}_{12} = -a\sin\omega. \tag{2.6.37}$$

这时第一和第二标形分别可以表为

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{I} &= a^2[(\mathrm{d}v^1)^2 + 2\cos\omega\mathrm{d}v^1\mathrm{d}v^2 + (\mathrm{d}v^2)^2], \\ \mathrm{II} &= -2a\sin\omega\mathrm{d}v^1\mathrm{d}v^2. \end{aligned}\right. \tag{2.6.38}$$

由§2.4中的讨论，两个标形的系数之间还应当满足Gauss方程. 将(2.6.38)式代入到Gauss方程中，经过简单的计算就可以得到

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^1\partial v^2} = \sin\omega. \tag{2.6.39}$$

方程(2.6.39)就是所谓的**Sine-Gordon方程**. 关于它我们有以下**结论**：

(1) 以(2.6.38)式表达的第一和第二标形，当且仅当其中的ω满足方程(2.6.39)时，曲面具有负的常Gauss曲率，即曲面为伪球面.

(2) 方程(2.6.39)是一个非线性方程.

方程(2.6.39)的求解与近年来发展起来的孤立子(soliton)有密切的联系. 下面我们要讨论由求解这类方程发展起来的变换方法.

五、Bäcklund变换

Bäcklund变换法是针对求解方程(2.6.39)而发展起来的一种非线性方程的解法. 它的主要想法是通过构造一种变换，从方程(2.6.39)的一个解变换为它的另一个解. 现在我们就来介绍这种方法.

先考虑曲面的焦曲面的一个性质. 回顾由(2.6.22)式所代表的两张焦曲面，可以证明曲面的法向量$\boldsymbol{n}$与焦曲面$\boldsymbol{r}^1$和$\boldsymbol{r}^2$的法向量是正交的(证明请读者自行完成). 若将$\boldsymbol{n}$记做$\boldsymbol{e}_1$，而把$\boldsymbol{r}^1$和$\boldsymbol{r}^2$分别记做$\boldsymbol{r}'$和$\boldsymbol{r}$，考虑两张焦曲面之差：

$$\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r} = (z_1 - z_2)\boldsymbol{e}_1. \tag{2.6.40}$$

令$l = z_1 - z_2$，则l表示两张焦曲面上对应点的距离. 这两个对应点由一条与焦曲面相切的直线联系着.

记两张焦曲面的法向量为 $\boldsymbol{n}'$ 和 $\boldsymbol{n}$，对应点的法向量的夹角余弦为 $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n}=\cos\tau$. 对两张焦曲面有如下的定理：

定理 2.8　若 $l=\mathrm{const}$，且 $\tau=\mathrm{const}$，则(2.6.40)式联系的两张焦曲面均是伪球面，它们的 Gauss 曲率相等，均为 $-\dfrac{\sin^2\tau}{l^2}$.

证明　在焦曲面 $\boldsymbol{r}$ 上引进标架 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{n}\}$，其中 $\boldsymbol{e}_1$ 是原曲面的法向量，$\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{r}$ 的法向量，而 $\boldsymbol{e}_2$ 是在 $\boldsymbol{r}$ 的切平面内与 $\boldsymbol{e}_1$ 正交的单位向量. 同样可以在 $\boldsymbol{r}'$ 上引进相应的标架 $\{\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{n}'\}$. 由条件 $\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{n}=\cos\tau$，可以得出这两个标架的关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{e}_1,\\ \boldsymbol{e}_2'=\boldsymbol{e}_2\cos\tau+\boldsymbol{n}\sin\tau,\\ \boldsymbol{n}'=-\boldsymbol{e}_2\sin\tau+\boldsymbol{n}\cos\tau.\end{cases}\tag{2.6.41}$$

令曲面向径的微商在标架中的分解为

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_i=a_{ij}\boldsymbol{e}_j,\\ \boldsymbol{r}_i'=a_{ij}'\boldsymbol{e}_j.\end{cases}\tag{2.6.42}$$

而标架 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{n}\}$ 的微商关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{1,i}=\alpha_{i3}\boldsymbol{e}_2-\alpha_{i2}\boldsymbol{n},\\ \boldsymbol{e}_{2,i}=-\alpha_{i3}\boldsymbol{e}_1+\alpha_{i1}\boldsymbol{n},\\ \boldsymbol{n}_i=\alpha_{i2}\boldsymbol{e}_1-\alpha_{i1}\boldsymbol{e}_2.\end{cases}\tag{2.6.43}$$

在推导(2.6.43)式时使用了标架的单位正交性. 在标架 $\{\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{n}'\}$ 中也有类似的关系：

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{1,i}'=\alpha_{i3}'\boldsymbol{e}_2'-\alpha_{i2}'\boldsymbol{n}',\\ \boldsymbol{e}_{2,i}'=-\alpha_{i3}'\boldsymbol{e}_1'+\alpha_{i1}'\boldsymbol{n}',\\ \boldsymbol{n}_i'=\alpha_{i2}'\boldsymbol{e}_1'-\alpha_{i1}'\boldsymbol{e}_2'.\end{cases}\tag{2.6.44}$$

利用(2.6.41)式，可得到 α_{ij}' 与 α_{ij} 的关系为

$$\begin{cases}\alpha_{i1}'=\alpha_{i1},\\ \alpha_{i2}'=\alpha_{i2}\cos\tau+\alpha_{i3}\sin\tau,\\ \alpha_{i3}'=-\alpha_{i2}\sin\tau+\alpha_{i3}\cos\tau.\end{cases}\tag{2.6.45}$$

由于混合偏导数的可交换性，有

$$\boldsymbol{r}_{12}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_{21}\cdot\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{r}_{12}'\cdot\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{r}_{21}'\cdot\boldsymbol{n}',$$

将(2.6.42)式、(2.6.43)式以及(2.6.44)式代入上式，即得

$$\begin{cases} a_{12}\alpha_{21} - a_{11}\alpha_{22} = a_{22}\alpha_{11} - a_{21}\alpha_{12}, \\ a'_{12}\alpha'_{21} - a'_{11}\alpha'_{22} = a'_{22}\alpha'_{11} - a'_{21}\alpha'_{12}. \end{cases} \tag{2.6.46}$$

最后由两个曲面之间的关系

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'_i &= \boldsymbol{r}_i + l\boldsymbol{e}_{1,i} = a_{ij}\boldsymbol{e}_j + l\alpha_{i3}\boldsymbol{e}_2 - l\alpha_{i2}\boldsymbol{n} \\ &= a'_{ij}\boldsymbol{e}'_j = a'_{i1}\boldsymbol{e}_1 + a'_{i2}(\boldsymbol{e}_2\cos\tau + \boldsymbol{n}\sin\tau) \end{aligned}$$

有

$$\begin{cases} a'_{i1} = a_{i1}, \\ a'_{i2}\cos\tau = a_{i2} + l\alpha_{i3}, \\ a'_{i2}\sin\tau = -l\alpha_{i3}. \end{cases} \tag{2.6.47}$$

而一般地，在曲纹坐标中有

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{r}_2 = \sqrt{g}\,\boldsymbol{n} = (a_{1j}\boldsymbol{e}_j) \times (a_{2k}\boldsymbol{e}_k) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2,$$

因此，有

$$\begin{cases} \sqrt{g} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ \sqrt{g'} = a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21}. \end{cases} \tag{2.6.48}$$

另外，还有

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (-b_1^j\boldsymbol{r}_j) \times (-b_2^k\boldsymbol{r}_k) = (b_1^1b_2^2 - b_1^2b_2^1)\sqrt{g}\,\boldsymbol{n} = \kappa\sqrt{g}\,\boldsymbol{n}. \tag{2.6.49}$$

同理，有

$$\boldsymbol{n}'_1 \times \boldsymbol{n}'_2 = \kappa'\sqrt{g'}\boldsymbol{n}'. \tag{2.6.50}$$

在现在的标架中，我们有

$$\begin{cases} \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{n}'_1 \times \boldsymbol{n}'_2 = (\alpha'_{11}\alpha'_{22} - \alpha'_{12}\alpha'_{21})\boldsymbol{n}'. \end{cases}$$

比较上式与(2.6.49)式和(2.6.50)式，我们得到

$$\begin{cases} \kappa = \dfrac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ \kappa' = \dfrac{\alpha'_{11}\alpha'_{22} - \alpha'_{12}\alpha'_{21}}{a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21}}. \end{cases} \tag{2.6.51}$$

利用(2.6.45)式、(2.6.46)式和(2.6.47)式，最后可以得到

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ &= \frac{\sin\tau}{l}\frac{a'_{12}\alpha_{21}-a'_{22}\alpha_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ &= \frac{\sin\tau}{l}\frac{a'_{12}\alpha'_{21}-a'_{22}\alpha'_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ &= \frac{\sin\tau}{l}\frac{a'_{11}\alpha'_{22}-a'_{21}\alpha'_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ &= \frac{\sin\tau}{l}\frac{a_{11}\alpha'_{22}-a_{21}\alpha'_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.\end{aligned}$$

再由(2.6.45)式中的第二个式子及(2.6.47)式中的后两个式子得

$$\alpha'_{i2} = -\frac{\sin\tau}{l}a_{i2}.$$

把它代入上式，有

$$\kappa = -\frac{\sin^2\tau}{l^2}\frac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} = -\frac{\sin^2\tau}{l^2}. \tag{2.6.52}$$

同理可得

$$\kappa' = -\frac{\sin^2\tau}{l^2}. \tag{2.6.53}$$

到此，我们就证明了定理的结论. ▌

上面的定理建立了这样一种关系，即两个 Gauss 曲率相同的伪球面可以作为同一曲面的焦曲面而联系起来. 受该定理的启发，可以考虑如下的 Bäcklund 变换.

定理 2.8 中所考虑的一对曲面，它们均是伪球面，因此当这两个曲面的渐近线坐标网的夹角分别为 ω 与 ω' 时，则 ω 与 ω' 都应当满足(2.6.39)式. 这时，引进 **Bäcklund 变换**：

$$\begin{cases}\dfrac{\omega_v+\omega'_v}{2} = \dfrac{1}{a}\sin\dfrac{\omega-\omega'}{2}, \\ \dfrac{\omega_u-\omega'_u}{2} = a\sin\dfrac{\omega-\omega'}{2}.\end{cases} \tag{2.6.54}$$

在此变换下，如果 ω 满足方程

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin\omega, \tag{2.6.55}$$

则 ω' 也满足方程

$$\frac{\partial^2 \omega'}{\partial u \partial v} = \sin\omega'. \tag{2.6.56}$$

事实上，(2.6.54)式中的第一个式子对 u 微商，并将第二式代入，可得

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{uv} + \omega'_{uv}}{2} &= \frac{1}{2a}\cos\frac{\omega - \omega'}{2}(\omega_u - \omega'_v) \\ &= \frac{1}{a}\cos\frac{\omega - \omega'}{2} \cdot a\sin\frac{\omega + \omega'}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\sin\omega + \sin\omega').\end{aligned}$$

由上式知，若 ω 满足方程(2.6.55)，则 ω' 满足方程(2.6.56)；反之亦然.

由上面的讨论，我们得到结论：若得到方程(2.6.39)的一个解，则由(2.6.54)式可以得到方程(2.6.39)的另一个解. 也就是说，将 ω 满足的二阶非线性方程(2.6.39)化为(2.6.54)式表示的一阶非线性方程组来求解，这比起直接求解方程(2.6.39)要简单.

上述事实从另一个角度来看就是：变换(2.6.54)保持方程(2.6.39)不变，换句话说，方程(2.6.39)是变换(2.6.54)的微分不变量. 将这一事实加以推广，对于非线性方程求解都可以应用这一方法. 这种对一个给定的方程寻求保持方程不变的变换的方法称为 **Lie-Bäcklund 变换法**，相应的变换称为 **Lie-Bäcklund 变换**. 在第五章中还要对 Lie-Bäcklund 变换作专门讨论.

§2.7　欧氏空间的变换群

一、变换群

设在 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中给定两个区域 $\mathscr{D}_x$ 和 $\mathscr{D}_z$，$\mathscr{D}_x$ 上有坐标 x^i，$\mathscr{D}_z$ 上有坐标 z^i；并设 $\mathscr{D}_z$ 上的点 z^i 与 $\mathscr{D}_x$ 上的点 x^i 之间存在一一的、映上的映射关系：

$$x^i = x^i(z^1,\cdots,z^n) \quad 和 \quad z^i = z^i(x^1,\cdots,x^n).$$

如果映射 $x^i=x^i(z^1,\cdots,z^n)$ 与 $z^i=z^i(x^1,\cdots,x^n)$ 均满足光滑性要求，则称由 $\mathscr{D}_x$ 到 $\mathscr{D}_z$ 的一一的、映上的映射为**变换**.

如果 $\mathscr{D}_x$ 与 $\mathscr{D}_z$ 是同一区域，则变换称为域上的一个变换，它实际上就是坐标变换.

域上的变换全体组成的集合在函数复合运算下构成一个群，称为**变换群**.

群的定义是这样的：如果集合 $\mathscr{G}$ 上定义了一种二元运算（称为乘法），它对于 $\forall f,g,h\in\mathscr{G}$ 都满足：

(1) $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$；（结合律）

(2) 存在单位元 $I\in\mathscr{G}$，使 $I\circ g=g$，$g\circ I=g$；

(3) 存在逆元 g^{-1}，使 $g\circ g^{-1}=I$，$g^{-1}\circ g=I$，

则称 $\mathscr{G}$ 为群.

从群的定义上考虑，如果 φ 是域上的变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z})$，而 ψ 是域上另一变换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y})$，则

(1) $\varphi\circ\psi$ 定义为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z}(\boldsymbol{y}))$；

(2) φ^{-1} 定义为 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$；

(3) I 定义为恒等变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}$.

在前面的讨论中，实际上我们已经遇上了许多变换群的例子，如欧氏空间中的 Galileo 变换组成的群，伪欧氏空间中 Lorentz 变换组成的群，等等. 在这一节中我们一般地来介绍几种类型的变换

群及其一些性质.

二、线性变换群 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$

令 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$表示实数域中全体 n 阶矩阵的集合，矩阵的元素 $a_i^j\in\mathbb{R}$. 在 n 维线性空间 $\mathscr{L}^n$中的线性变换为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{2.7.1}$$

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{L}^n$，而 $\boldsymbol{A}\in\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$是非退化矩阵. (2.7.1)式表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与线性变换之间一一对应，故有时也直接把 $\boldsymbol{A}$ 称为线性变换.

两个线性变换的积可以用乘积矩阵来表示. 若令 $\boldsymbol{A}=\left(a_j^i\right)$，$\boldsymbol{B}=\left(b_j^i\right)$，则线性变换 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的积 $\boldsymbol{C}$ 可表示为

$$\boldsymbol{C}=\left(c_j^i\right)=\boldsymbol{AB}=\left(a_k^i b_j^k\right). \tag{2.7.2}$$

$\mathscr{L}^n$上的全体线性变换组成的集合在矩阵的乘法下构成了一个群，称为**线性变换群**，记做 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$. 它是一个 n^2 维的空间.

线性变换的乘法也是一种对应关系，它将 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$中的两个元素映射到了 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$中的另一个元素.

显然，$\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$中的逆元用矩阵的逆矩阵表示，而单位元则表示为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$.

若在矩阵集合 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中引进**范数**：

$$\|\boldsymbol{A}\|^2=\sum_{i,j=1}^{n}|a_j^i|^2, \tag{2.7.3}$$

则显然有

$$\begin{cases}\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|,\\ \|\boldsymbol{AB}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|.\end{cases} \tag{2.7.4}$$

由于引进了 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中的范数，因此在 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中就有了邻域的概念. 下面我们就来考虑单位元 $\boldsymbol{I}$ 的邻域内的性质. 我们将证明：当$\boldsymbol{X}\in\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$，而 $\|\boldsymbol{X}\|<1$ 时，矩阵 $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{X}$ 是可逆的，即

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{X}\in\mathscr{GL}(n,\mathbb{R}).$$

先考虑

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^2-\cdots+(-\boldsymbol{X})^n+\cdots. \qquad (2.7.5)$$

它在范数意义下是收敛的. 事实上,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{B}_m-\boldsymbol{B}_{m+p}\| &= \|\boldsymbol{X}^{m+1}-\boldsymbol{X}^{m+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\boldsymbol{X}^{m+p}\|\\ &\leqslant \|\boldsymbol{X}^{m+1}\|+\|\boldsymbol{X}^{m+2}\|+\cdots+\|\boldsymbol{X}^{m+p}\|\\ &\leqslant \|\boldsymbol{X}\|^{m+1}(1+\|\boldsymbol{X}\|+\cdots+\|\boldsymbol{X}\|^{p-1})\\ &\leqslant \|\boldsymbol{X}\|^{m+1}\frac{1-\|\boldsymbol{X}\|^p}{1-\|\boldsymbol{X}\|}\leqslant\|\boldsymbol{X}\|^{m+1}\frac{1}{1-\|\boldsymbol{X}\|},\end{aligned}$$

由于 $\|\boldsymbol{X}\|<1$,因此 $\boldsymbol{B}$ 是收敛的. 而由于$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}$,因此有

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{X})^{-1}=\boldsymbol{B}. \qquad (2.7.6)$$

由上面讨论知,在单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的邻域内,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{X}$ 是 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ 中的元素. 同样,对于任何一个元素 $\boldsymbol{B}_0\in\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$,也可以证明在其邻域内的元素是属于 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$的.

接下来要考虑的是相对较抽象的问题. 在 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中,每个元素有 n^2 个独立分量,是 n^2 维的空间,而 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$则是 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中的一个区域. 在 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$的单位元 $\boldsymbol{I}$ 上,存在的一个"切空间",它是由如下的方式产生的:

考虑 $\boldsymbol{A}(t)\in\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$是一条"曲线",设这条曲线经过单位元 $\boldsymbol{I}$,无妨设 $\boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{I}$. 这条曲线在 $\boldsymbol{I}$ 点的"切向量"是矩阵 $\dot{\boldsymbol{A}}(0)$,而 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$在 $\boldsymbol{I}$ 点的"切空间"就是所有这些切向量所张成的空间. 这个切空间记做 $\mathscr{T}_I[\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})]$.

对于 $\forall\,\boldsymbol{X}\in\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$,当 t 充分小的时候,由上面关于 $\boldsymbol{I}$ 的邻域性质的讨论知,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{X}$ 也是 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$中的元素,即 $\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{X}$ 是$\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$中的曲线. 由切空间的定义知,$\dot{\boldsymbol{A}}(0)=\boldsymbol{X}$ 是属于切空间 $\mathscr{T}_I[\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})]$的. 由此我们证明了

$$\mathscr{M}(n,\mathbb{R})\subset\mathscr{T}_I[\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})].$$

但是由于 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$是全体 n 阶矩阵的集合,因此

$$\mathscr{M}(n,\mathbb{R})=\mathscr{T}_I[\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})],$$

即线性变换群在单位元处的切空间是全体矩阵的集合.

按照上面的观点，我们实际上是将变换群看做是 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$ 中的“曲面”.

在以上的讨论中，实数域 $\mathbb{R}$ 在用复数域 $\mathbb{C}$ 代替时，复线性变换群记做 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{C})$.

三、线性变换群的某些特殊子群

如果一个群的某个子集合在群的运算下又构成一个群，则由子集构成的这个群称为原来群的**子群**.

对于线性变换群 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ 或 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{C})$，在变换满足一些特殊条件时，构成了 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ 或 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{C})$ 的一些子群. 下面我们就来讨论这些子群.

1. 特殊线性变换群 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$ 和 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{C})$

如果规定线性变换的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\det\boldsymbol{A} = 1, \tag{2.7.7}$$

则这些变换构成 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ 的一个子群. 这个子群称为**特殊线性变换群**，记做 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$. 同样可以有特殊线性变换群 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{C})$.

由于条件(2.7.7)相当于在 n^2 维空间中给定了一个约束条件，因此 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$ 是 n^2-1 维空间，它可以看做是 n^2 维空间中的一个 n^2-1 维超曲面. 类似于变换群 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ 的切空间的讨论，我们可以对变换群 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$ 在 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$ 中的切空间进行如下分析.

考虑 $\boldsymbol{A}(t)$ 是 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$ 中的一条曲线，这条曲线过 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$ 的单位元 $\boldsymbol{I}$，无妨设 $\boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{I}$. 显然 $\dot{\boldsymbol{A}}(0)$ 是 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$ 的切空间中的元素. 由于 $\det\boldsymbol{A}=1$，因此我们有

$$\mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{A}}(0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\boldsymbol{A}\bigg|_{t=0} = 0, \tag{2.7.8}$$

即 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$ 在单位元 $\boldsymbol{I}$ 处的切空间中的元素是零迹矩阵.

对于 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$ 中的任意一个零迹矩阵 $\boldsymbol{X}$，曲线 $\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{X}$ 是经过单位元 $\boldsymbol{I}$ 的. 由线性代数中特征多项式的展开公式，有

$$\det\boldsymbol{A}(t)=\det(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{X})=1+t\operatorname{tr}(\boldsymbol{X})+o(t)=1+o(t).$$

由此可知曲线 $\boldsymbol{A}(t)$与超曲面 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$是相切的(在单位元处),所以曲线的切向 $\boldsymbol{X}$ 也就是超曲子面的切向. 这样我们就证明了特殊线性变换群 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$的切空间为

$$\mathscr{T}_I[\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})]=\{\boldsymbol{X}:\boldsymbol{X}\in\mathscr{M}(n,\mathbb{R}),\operatorname{tr}(\boldsymbol{X})=0\}.\tag{2.7.9}$$

对于变换群 $\mathscr{SL}(n,\mathbb{C})$,也有类似的结论.

2. 正交群 $\mathscr{O}(n)$和酉群 $\mathscr{U}(n)$

正交变换群(简称**正交群**)是线性变换群的一个子群,它的元素所对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中的正交矩阵,即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.\tag{2.7.10}$$

上式所代表的等式一共有 n^2 个方程,但由于对称关系,只有 $\frac{n(n+1)}{2}$个方程是独立的. 一般地,$\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中由约束关系(2.7.10)所表示的集合也是 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中的一个$\frac{n(n+1)}{2}$维超曲面. 正交群一般记做 $\mathscr{O}(n)$.

正交群 $\mathscr{O}(n)$在单位元 $\boldsymbol{I}$ 处的切空间对应于 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中的反称矩阵. 考虑 $\mathscr{O}(n)$中某一条曲线 $\boldsymbol{A}(t)$,$\boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{I}$. 由定义(2.7.10)式,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{O}.$$

若记 $\boldsymbol{X}=\dot{\boldsymbol{A}}(0)$为单位元处的切向量,上式令 $t=0$,有

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}.\tag{2.7.11}$$

反过来,对于 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中任意的反称矩阵 $\boldsymbol{X}$,曲线 $\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{X}$ 有如下性质:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)&=(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{X})(\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{I}+t(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})+o(t)=\boldsymbol{I}+o(t).\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{A}(t)$与超曲面 $\mathscr{O}(n)$是相切的. 这样我们就有

$$\mathscr{T}_I[\mathscr{O}(n)]=\{\boldsymbol{X}:\boldsymbol{X}\in\mathscr{M}(n,\mathbb{R}),\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}\}.\tag{2.7.12}$$

酉群 $\mathscr{U}(n)$是$\mathscr{GL}(n,\mathbb{C})$的一个子群，它的元素对应的矩阵$\boldsymbol{A}$满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{I}, \tag{2.7.13}$$

这里上标 H 表示 Hermite[①] 转置，即共轭转置. 如果将(2.7.13)式看做是矩阵$\boldsymbol{A}$各分量的一个方程组，则由于它不是分量的解析函数，因此不能将$\mathscr{U}(n)$看做是$\mathscr{M}(n,\mathbb{C})$中的一个超曲面.

若我们在$\mathbb{R}^{2n^2}$中考虑酉群，则(2.7.13)式代表了n^2个独立的实方程，因此$\mathscr{U}(n)$可以看做$\mathbb{R}^{2n^2}$中的一个n^2维超曲面. 同样可以证明，$\mathscr{U}(n)$在单位元处的切空间为

$$\mathscr{T}_I[\mathscr{U}(n)] = \{\boldsymbol{X}:\ \boldsymbol{X}\in\mathscr{M}(n,\mathbb{C}),\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{O}\}. \tag{2.7.14}$$

类似于特殊线性变换群的讨论，同样可以考虑特殊正交群$\mathscr{SO}(n)$及特殊酉群$\mathscr{SU}(n)$. 特殊正交群$\mathscr{SO}(n)$也称为**旋转群**，它是$\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$中的$\dfrac{n(n-1)}{2}$维曲面，而$\mathscr{SU}(n)$则是$\mathbb{R}^{2n^2}$中的$n^2-1$维曲面.

四、变换群与其切空间的关系

在变换群和它的切空间之间可以建立如下的一种映射关系：令$\mathscr{G}$为变换群，$\mathscr{T}=\mathscr{T}_I[\mathscr{G}]$为该群在单位元处的切空间，则有

$$\exp:\ \mathscr{T}\to\mathscr{G},\quad \exp(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{I}, \tag{2.7.15}$$

且对于$\boldsymbol{X}\in\mathscr{T}$，有

$$\exp(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{X}}{1!}+\frac{\boldsymbol{X}^2}{2!}+\cdots, \tag{2.7.16}$$

其中$\boldsymbol{0}$是切空间中的零元素.

一般地，映射 exp 有如下性质：

引理　(1) 对于任给的$\boldsymbol{X}\in\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$或$\mathscr{M}(n,\mathbb{C})$，$\exp(\boldsymbol{X})$均是

---

① C. Hermite(1822—1901)，法国数学家.

收敛的(范数意义下);

(2) 如果 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 可交换,则 $\exp(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\exp(\boldsymbol{X})\cdot\exp(\boldsymbol{Y})$;

(3) 对于任意的 $\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{A}=\exp(\boldsymbol{X})$可逆,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\exp(-\boldsymbol{X})$;

(4) 对于任意的 $\boldsymbol{X}$,$\exp(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})=[\exp(\boldsymbol{X})]^{\mathrm{T}}$.

引理的证明是十分容易的,请读者自行完成.下面我们将说明映射 exp 总是将 $\mathscr{T}$ 映射到变换群 $\mathscr{G}$.实际上,引理中的(3)已经说明了 exp 将 $\mathscr{T}_I[\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})]$映射到 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$(对于复变换情形也是如此).现在我们考虑当 $\mathscr{G}$ 是上一段中讨论过的一些特殊子群时的情况.

定理 2.9 (1) 若 $\mathscr{G}=\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$,$\boldsymbol{X}\in\mathscr{T}=\mathscr{T}_I[\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})]$,即 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})=0$,则有

$$\boldsymbol{A}=\exp(\boldsymbol{X})\in\mathscr{G},\quad 即\quad \det\boldsymbol{A}=1;$$

(2) 若 $\mathscr{G}=\mathscr{O}(n)$,$\boldsymbol{X}\in\mathscr{T}=\mathscr{T}_I[\mathscr{O}(n)]$,即 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,则有

$$\boldsymbol{A}=\exp(\boldsymbol{X})\in\mathscr{G},\quad 即\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I};$$

(3) 若 $\mathscr{G}=\mathscr{U}(n)$,$\boldsymbol{X}\in\mathscr{T}=\mathscr{T}_I[\mathscr{U}(n)]$,即 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{0}$,则有

$$\boldsymbol{A}=\exp(\boldsymbol{X})\in\mathscr{G},\quad 即\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}.$$

证明 三条性质的证明方法是类似的,我们只对(1)进行证明,(2)及(3)的证明这里不再赘述了.

令 $\boldsymbol{A}(t)=\exp(t\boldsymbol{X})$,由于 $t_1\boldsymbol{X}$ 与 $t_2\boldsymbol{X}$ 可交换,因此有

$$\boldsymbol{A}(t_1+t_2)=\boldsymbol{A}(t_1)\boldsymbol{A}(t_2).$$

若记 $f(t)=\det\boldsymbol{A}(t)$,则由行列式性质有 $f(t_1+t_2)=f(t_1)f(t_2)$.一方面,显然$f(t)$是一个连续函数,由数学分析知识可以证明:

$$f(t)=\exp(ct),\tag{2.7.17}$$

其中 c 为待定常数.另一方面,有

$$\begin{aligned}f(t)&=\det\boldsymbol{A}(t)=\det[\exp(t\boldsymbol{X})]=\det[\boldsymbol{I}+t\boldsymbol{X}+o(t)]\\&=1+t\cdot\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})+o(t)=1+o(t).\end{aligned}$$

所以,有 $c=f'(0)=0$,从而

$$f(t)=\det\boldsymbol{A}(t)=\exp(0\cdot t)=1.$$

令 $t=1$,即得 $\boldsymbol{A}=\exp(\boldsymbol{X})\in\mathscr{SL}(n,\mathbb{R})$. ▌

推论 对于 $\mathscr{G}=\mathscr{SO}(n)$ 或 $\mathscr{SU}(n)$，如果 $\boldsymbol{X}\in\mathscr{T}_I(\mathscr{G})$，则有

$$\boldsymbol{A}=\exp(\boldsymbol{X})\in\mathscr{G}.$$

映射 exp 也称为**指数映射**. 可以证明该映射在 $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$ 中零点处是局部的一一映射. 为了说明这一点只要注意到 exp 作为一个 n^2 元函数在原点处矩阵的 Jacobi 行列式等于 1. 从整体上来看，从 $\mathscr{T}$ 到 $\mathscr{G}$ 的映射一般不是一一映射，同样也不是映上的.

五、欧氏空间中的保角变换

作为变换群的一个特例，现在我们来讨论欧氏空间中的保角变换群.

设在 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的某个区域内给定一组坐标 $\{x^i\}$，其对应的基底为 $\{\boldsymbol{e}_i\}$，度量系数为 g_{ij}. 在坐标变换

$$x^{i'}=x^{i'}(x^1,\cdots,x^n) \tag{2.7.18}$$

下，空间的基底变为 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$，度量系数变为 g'_{ij}，则一般地，有

$$\boldsymbol{e}'_i=\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\boldsymbol{e}_j, \tag{2.7.19}$$

$$g'_{ij}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}}g_{kl}. \tag{2.7.20}$$

若(2.7.20)式满足

$$g'_{ij}=\lambda(\boldsymbol{x})g_{ij}, \tag{2.7.21}$$

其中 $\lambda(\boldsymbol{x})$ 为正的实函数，则我们称这样的坐标变换为欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的**保角变换**. 事实上，可以证明在这种坐标变换下任意两个坐标基底的夹角在坐标变换后是不变的.

对于 $n=1$ 来说，所有的正则变换均是保角变换. 当 $n=2$ 时，由复变函数知识知，只要

$$\omega=x'_1+\mathrm{i}x'_2=f(x_1,x_2)=\tilde{f}(x_1+\mathrm{i}x_2,x_1-\mathrm{i}x_2)=\tilde{f}(z,\bar{z})$$

是 z 的解析(或共轭解析)函数，则变换 f 为平面上的保角变换. 但当$n\geqslant 3$ 时，欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的保角变换则与 $n=1,2$ 时有显著的区别，体现在下面的定理中.

定理 2.10(Liouville 定理)　当 $n\geqslant 3$ 时,欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中任何一个充分光滑(至少四阶连续导数)的保角变换由空间的刚体运动、膨胀变换以及倒数变换复合而成.

证明　我们只对 $n=3$ 进行证明,当 $n>3$ 时同理可证. 另外,由于在下面的证明过程中不会用到度量系数矩阵的正定性,因此定理的结论对于 $n\geqslant 3$ 的伪欧氏空间也是成立的.

设 $y^k=y^k(x^1,\cdots,x^n)$ 是 $\mathscr{E}^n$ 中由 $\mathscr{U}$ 到 $\mathscr{V}$ 的一个充分光滑的保角变换. 令 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathscr{U}$ 上的两个向量,$\boldsymbol{\xi}=(\xi_x^1,\cdots,\xi_x^n)$, $\boldsymbol{\eta}=(\eta_x^1,\cdots,\eta_x^n)$,并设在 $\mathscr{V}$ 中坐标系 $\boldsymbol{y}=(y^1,\cdots,y^n)$ 上,$\boldsymbol{\xi}=(\xi_y^1,\cdots,\xi_y^n)$,$\boldsymbol{\eta}=(\eta_y^1,\cdots,\eta_y^n)$,于是

$$\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle = g_{ij}\xi_x^i\eta_x^j = g'_{ij}\xi_y^i\eta_y^j = \lambda g_{ij}\xi_y^i\eta_y^j. \qquad (2.7.22)$$

若 $\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\rangle=0$,即 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\eta}$ 正交时,有

$$g_{ij}\xi_x^i\eta_x^j = 0.$$

由(2.7.22)式可知同时也有

$$g_{ij}\xi_y^i\eta_y^j = 0.$$

而按照坐标变换关系,知

$$\xi_y^\alpha = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi})^\alpha,\quad \eta_y^\alpha = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta})^\alpha,\quad \text{其中}\quad \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right).$$

令 $\boldsymbol{\eta}_1=(\eta_1^\alpha)$,$\boldsymbol{\eta}_2=(\eta_2^\alpha)$,$\boldsymbol{\eta}_3=(\eta_3^\alpha)$ 是 $\boldsymbol{x}$ 点上的三个相互正交的常向量,由于变换是保角的,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3$ 也相互正交,于是有

$$\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2\rangle = 0,\quad \langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3\rangle = 0,\quad \langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1\rangle = 0. \qquad (2.7.23)$$

将(2.7.23)式中的第一个式子两边沿 $\boldsymbol{\eta}_3$ 方向求导数,得到

$$\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{y}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\eta_1^\beta\eta_3^\gamma,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2\right\rangle + \left\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1,\frac{\partial^2\boldsymbol{y}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\eta_2^\beta\eta_3^\gamma\right\rangle = 0.$$

同理有

$$\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{y}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\eta_2^\beta\eta_1^\gamma,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3\right\rangle + \left\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2,\frac{\partial^2\boldsymbol{y}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\eta_3^\beta\eta_1^\gamma\right\rangle = 0,$$

$$\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{y}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\eta_3^\beta\eta_2^\gamma,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1\right\rangle + \left\langle\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3,\frac{\partial^2\boldsymbol{y}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\eta_1^\beta\eta_2^\gamma\right\rangle = 0.$$

得到的三个式子中，后两式相加，再减去第一式，得

$$\left\langle \frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \eta_1^\beta \eta_2^\gamma, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3 \right\rangle = 0. \tag{2.7.24}$$

由于 $n=3$，并且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3$ 相互正交，因此由(2.7.24)式可知

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \eta_1^\beta \eta_2^\gamma = \mu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 + \nu(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2,$$

其中

$$\begin{cases} \mu(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 \rangle} \left\langle \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \eta_1^\beta \eta_2^\gamma, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 \right\rangle, \\ \nu(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2 \rangle} \left\langle \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \eta_1^\beta \eta_2^\gamma, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2 \right\rangle. \end{cases}$$

由于

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = g_{\alpha\beta} \xi_x^\alpha \eta_x^\beta = \lambda g_{\alpha\beta} \xi_y^\alpha \eta_y^\beta = \lambda \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta} \rangle,$$

因而有

$$\|\boldsymbol{\eta}_1\|^2 = \lambda \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1\|^2 = \text{const},$$

所以

$$\begin{aligned} \mu(\boldsymbol{x}) &= \frac{\lambda \eta_2^\beta}{2\|\boldsymbol{\eta}_1\|^2} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 \rangle = \frac{\lambda \eta_2^\beta}{2\|\boldsymbol{\eta}_1\|^2} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\|\boldsymbol{\eta}_1\|^2}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\lambda \eta_2^\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = -\frac{\eta_2^\alpha}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^\alpha}. \end{aligned} \tag{2.7.25}$$

同理有

$$\nu(\boldsymbol{x}) = -\frac{\eta_1^\alpha}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^\alpha}. \tag{2.7.26}$$

由此我们得到如下关系：

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{y}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \eta_1^\beta \eta_2^\gamma = -\frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^\gamma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \lambda}{\partial x^\beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial x^\gamma} \right) \eta_1^\beta \eta_2^\gamma. \tag{2.7.27}$$

若令 $\rho = \sqrt{\lambda}$，则由上式可得

$$\frac{\partial^2 (\rho \boldsymbol{y})}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \eta_1^\beta \eta_2^\gamma = \boldsymbol{y} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \eta_1^\beta \eta_2^\gamma. \tag{2.7.28}$$

两边再一次对 $\boldsymbol{\eta}_3$ 方向求导，得

$$\frac{\partial^3(\rho\boldsymbol{y})}{\partial x^\beta \partial x^\gamma \partial x^\delta}\eta_1^\beta \eta_2^\gamma \eta_3^\delta = \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\eta_1^\beta \eta_2^\gamma (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3) + \boldsymbol{y}\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^\beta \partial x^\gamma \partial x^\delta}\eta_1^\beta \eta_2^\gamma \eta_3^\delta. \tag{2.7.29}$$

上式中对换 $\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_3$ 位置仍应成立，因此有

$$\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\eta_1^\beta \eta_2^\gamma (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3) = \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\eta_3^\beta \eta_2^\gamma (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1).$$

但由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3$ 是线性无关的，因此有

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\eta_1^\beta \eta_2^\gamma \equiv 0. \tag{2.7.30}$$

由于 $\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_3$ 是两个任意正交的常向量，因而上式成立等价于

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = \sigma(\boldsymbol{x}) g_{\beta\gamma}. \tag{2.7.31}$$

下面证明 $\sigma(\boldsymbol{x})$ 是常数. 设 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$ 是 $\boldsymbol{x}$ 点上三个常向量，则由(2.7.31)式有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \rho}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma}\xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma &= \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha}\xi_1^\alpha\right)\langle \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3 \rangle + \sigma \frac{\partial \langle \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3 \rangle}{\partial x^\alpha}\xi_1^\alpha \\ &= \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha}\xi_1^\alpha\right)\langle \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3 \rangle.\end{aligned}$$

上式中交换 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 的位置并与原式比较，得

$$\left\langle \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha}\xi_1^\alpha\right)\boldsymbol{\xi}_2 - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha}\xi_2^\alpha\right)\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_3 \right\rangle = 0.$$

由于 $\boldsymbol{\xi}_3$ 是任意的，因此

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha}\xi_1^\alpha\right)\boldsymbol{\xi}_2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha}\xi_2^\alpha\right)\boldsymbol{\xi}_1.$$

再由 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 的任意性知 $\frac{\partial \sigma}{\partial x^\alpha}=0$，即

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = \text{const}. \tag{2.7.32}$$

有了上面的关系，再从(2.7.31)式即得到

$$\rho = \sqrt{\lambda} = a_1 \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|^2 + b_1, \tag{2.7.33}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0, a_1, b_1$ 为积分常数. 反过来，逆变换 $\boldsymbol{y} \longmapsto \boldsymbol{x}$ 同样是保角变

换，系数为 λ^{-1}，因此有

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = a_2\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|^2 + b_2, \tag{2.7.34}$$

$\boldsymbol{y}_0, a_2, b_2$ 同样为积分常数. 综合上面两式，我们就得到 $\mathscr{E}^n$ 中保角变换的通解为

$$(a_1\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2 + b_1)\cdot(a_2\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|^2 + b_2) = 1. \tag{2.7.35}$$

下面的任务就是弄清上述通解都对应了一些什么样的变换. 首先注意到球面 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| = \text{const}$ 对应于球面 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\| = \text{const}$. 在 $\mathscr{U}$ 中过 $\boldsymbol{x}_0$ 点的直线段 $\overline{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_1}$ 是垂直于球面 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| = \text{const}$ 的，若经过变换

$$\overline{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_1} \longmapsto \overline{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}_1},$$

由保角性知，$\overline{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}_1}$ 一定要垂直于 $\mathscr{V}$ 中的球面 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\| = \text{const}$，这就必然推出结论：$\overline{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}_1}$ 一定是 $\mathscr{V}$ 中过 $\boldsymbol{y}_0$ 点的直线段. 因此

$$\begin{aligned} & a_2(\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1\| \pm \|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_0\|)^2 + b_2 \\ &= a_2\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|^2 + b_2 \\ &= \frac{1}{a_1\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2 + b_1}. \end{aligned} \tag{2.7.36}$$

一方面，由上式可看出 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1\|$ 一定是 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|$ 的代数函数. 另一方面，用参数 τ $(t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2)$ 描述 $\overline{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}_1}$，则

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1\| = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.7.37}$$

若选取 τ 为 $\overline{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_1}$ 上的弧长参数，则 $t_1 = \|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|$，$t_2 = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|$，因此

$$\therefore \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1\| = \int_{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}^{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\lambda}} = \int_{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0\|}^{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\frac{\mathrm{d}\tau}{a_1\tau^2 + b_1}. \tag{2.7.38}$$

由(2.7.38)式看出，若 $a_1 b_1 \neq 0$，必然得出 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1\|$ 是 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|$ 的超越函数. 这与 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_1\|$ 是 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|$ 的代数函数相矛盾，因此必然有 $a_1 b_1 = 0$.

若 $a_1=0$，由(2.7.33)式知 $\lambda=\text{const}$. 这说明变换是由刚体运动与膨胀相复合的.

若 $b_1=0$，令 $\boldsymbol{x}^*=\dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2}$，则

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^*))=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}^*).$$

而由(2.7.35)式，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}^*)$可表示为(同理这时 $b_2=0$)

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|^2=\alpha\|\boldsymbol{x}^*\|^2. \tag{2.7.39}$$

因此，这时变换由刚体运动、膨胀及反演三种组合而成. 这样我们就证明了定理. ▌

习　题　二

1. 试证张量的绝对微商与缩并运算可交换.

2. 试证度量张量的绝对微商为零.

3. 试证对于欧氏空间中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\eta}$，有

$$\partial_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\xi}_1\cdot\boldsymbol{\xi}_2)=(\nabla_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\xi}_1)\cdot\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_1\cdot(\nabla_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{\xi}_2).$$

4. 试求曲率和挠率均为常数的空间曲线.

5. 证明曲线的曲率和挠率成比例当且仅当存在一个常向量与曲线的切向量成定角.

6. 设凸曲面上无重量的柔索不可伸长，两端拉紧. 已知柔索与曲面光滑接触，试证柔索的平衡状态是曲面的测地曲线.

7. 试证约束在曲面上的质点做惯性运动的轨迹是测地曲线.

8. 当曲面的第一标形为 $I=\lambda(u,v)[(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2]$时，求曲面上的联络系数 Γ_{ij}^k 和 Gauss 曲率.

9. 试计算旋转曲面的两个标形的系数，并求两个主曲率.

10. 试证由$\dfrac{x^2}{a^2-\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2-\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2-\lambda}=1\,(a<b<c)$确定三族两两正交的曲面，且由这三族曲面的交线确定了一个正交曲线网，并求它的 Lamé 系数 H_i.

11. 设三族曲面 $\varphi(x,y,z)=c_1$，$\psi(x,y,z)=c_2$，$\chi(x,y,z)=c_3$ 是相互正交的，求证它们的交线是曲面上的曲率线.

12. 试证封闭的光滑曲面上一定存在椭圆点.

13. 设三维空间中刚体绕 z 轴旋转 θ 角，试求其变换矩阵.

14. 试证第 13 题的变换构成 $\mathscr{GL}(3,\mathbb{R})$ 的一个单参数子群，并写出其切空间(在单位元处).

15. 试证曲线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 处于半径为 R 的球面上的充分必要条件是：

$$R^2 = \frac{1}{\kappa_1^2}\left[1+\left(\frac{1}{\kappa_1\kappa_2}\frac{\mathrm{d}\kappa_1}{\mathrm{d}s}\right)^2\right].$$

16. 试证曲面 $z=f(x,y)$ 的平均曲率为

$$H = \mathrm{div}\left(\frac{\mathbf{grad}\,f}{\sqrt{1+(\mathbf{grad}\,f)^2}}\right).$$

17. 已知曲面的度量二次型为 $\mathrm{d}s^2=H_1^2\mathrm{d}u^2+H_2^2\mathrm{d}v^2$. 设有一以它为中面，厚度为 h 的弹性薄壳，试导出它的平衡方程，以中面位移表示变形分量和弹性关系.

18. 给出 $\mathscr{SL}(2,\mathbb{R})$ 的全部单参数子群.

第三章　流形与 Riemann 流形

§3.1　流　　形

一、流形的定义

流形(manifold)的概念是欧氏空间的推广，同时它也是第二章中我们所考虑的曲线和曲面的抽象.

粗略地说，流形 $\mathscr{M}$ 是这样的空间，它的每一点的邻域像欧氏空间. 但这样的说法是不能作为流形的定义的，许多概念需要明确. 严格来说，流形的定义要涉及许多拓扑学中的概念. 我们在这里并不打算讨论最一般的拓扑流形，因此，下面先给出流形的定义，然后对其中的概念再进行一些必要的说明.

定义 3.1　设 $\mathscr{M}$ 是 Hausdorff 空间. 若对任意一点 $\boldsymbol{x}\in\mathscr{M}$，都有 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathscr{M}$ 中的一个邻域 $\mathscr{U}$ 同胚于 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的一个开集，则称 $\mathscr{M}$ 是一个 n **维流形**.

有必要对定义中出现的名词作一些简单的解释. 首先，邻域的定义取决于空间的拓扑结构. 在我们所遇到的通常的拓扑中，可以利用距离空间中的距离来定义一个点的邻域. 对于一个抽象集合 $\mathscr{S}$，任给 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{S}$，如果非负实函数 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}$ 满足如下三个条件：

(1) **正定性**：$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 时；

(2) **对称性**：$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$；

(3) **三角不等式**：$\forall \boldsymbol{z}\in\mathscr{S}$，有 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leqslant d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$，

则称 $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 为 $\mathscr{S}$ 中两点的**距离**. 定义了距离的集合称为**距离空间**(简称**空间**).

对于同一集合，距离的定义是不唯一的. 如在 $\mathscr{E}^n$ 中，对任意的两点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$，下面的函数均可作为距离的定义：

$$d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2},$$

$$d_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x^i-y^i|\},$$

$$d_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{1+d_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}.$$

在距离空间中，一点的邻域定义为空间中到该点的距离小于某一给定的正实数的点的集合，并且这个定义应与距离函数的选取是无关的.

其次的问题是开集. 开集 $\mathscr{A}$ 是指空间的子集合，且 $\mathscr{A}$ 中每一点的某一邻域完全包含在集合 $\mathscr{A}$ 中. 同样这个定义也应与定义邻域的距离函数是无关的.

明确了邻域与开集以后，就要谈到同胚映射的概念. 同胚映射是一种拓扑学的等价关系，两个空间同胚是指存在一个一一的、映上的连续映射，且其逆映射也是连续的. 同胚映射中的连续性是指：映射像集中的任意开集的原像也是开集.

连续映射保持了流形上各点的邻近性，而同胚映射则进一步要求在映射过程中不同的点映射为不同的点，并且不会产生新的点. 对同胚映射的一种直观的比拟是将流形想象为用橡皮做成的，可以任意拉伸、弯曲，但不允许撕裂（一分为二），也不允许把不同的点黏合在一起（合二为一）.

在同胚映射下保持不变的性质为拓扑性质. 如开集、收敛序列、紧致性、分离性、连通性等都是拓扑性质. 对同胚映射的进一步了解可参看有关拓扑学的书籍.

最后需要说明的是 Hausdorff 空间.

定义 3.2　Hausdorff 空间是这样的空间，其中的任意不同两点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间均有不相交的邻域，即存在开集 $\mathscr{U}_\alpha$ 与 $\mathscr{U}_\beta$，$\boldsymbol{a}\in\mathscr{U}_\alpha$，$\boldsymbol{b}\in\mathscr{U}_\beta$，使得

$$\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta = \varnothing.$$

在流形的定义中强调流形是一个 Hausdorff 空间，就强调了流形的可分性，这使得流形中连接任意两点的连线可无限细分. 描述空间的可分性有许多不同的说法，我们这里采用的是最常用的一种.

具有通常拓扑结构的实数域是一种 Hausdorff 空间. 在以后的讨论中我们所涉及的空间均假设是 Hausdorff 空间.

在明确了定义 3.1 中的几个名词以后，下面我们举些简单的例子来说明流形的概念. 例如：

（1）圆是一个一维流形，记做 $\mathscr{S}^1$.

（2）二维平面上所有带交点的曲线均不是一维流形，因为在交点的邻近是不可能同胚于一条直线的.

（3）三维空间中的二维球面是一个二维流形，记做 $\mathscr{S}^2$.

（4）三维空间中锥面 $\mathscr{M}=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=z^2\}$ 不是流形，因为在原点附近它不同胚于一平面. 但半锥面

$$\mathscr{M}^+=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=z^2,z\geqslant 0\}$$

则是一个二维流形.

二、流形上的坐标

在讨论流形上的坐标之前，先明确一些 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中的函数分类. 设 f 是定义在开集 $\mathscr{U}\subset\mathscr{E}^n$ 上的实值函数. 如果 f 的所有直到 r 阶的偏导数都存在并且是连续的，即 f 是 r 次连续可微的，则称 f 是 C^r 类的，这里 r 是正整数. 如果 f 有任意阶的连续偏导数，则称 f 是 C^∞ 类的. 如果 f 在 $\mathscr{U}$ 中每一个点的邻域均能表成收敛的幂级数，即 f 是解析的，则称 f 是 C^ω 类的.

为了对流形上的函数和张量场进行微分运算，可在流形上引进坐标系. 由流形的定义，在 n 维流形 $\mathscr{M}$ 的开集与 $\mathscr{E}^n$ 中的开集之间存在同胚映射，因此可利用该同胚映射来建立流形 $\mathscr{M}$ 上的局部坐标系.

设 $\mathscr{U}$ 是流形 $\mathscr{M}$ 上任一点的一个邻域，同胚映射为

$$\varphi_{\mathscr{U}}: \mathscr{U} \to \varphi_{\mathscr{U}}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{E}^n, \tag{3.1.1}$$

这里 $\varphi_{\mathscr{U}}(\mathscr{U})$ 是 $\mathscr{E}^n$ 中的开集. 因为 $\varphi_{\mathscr{U}}$ 是同胚映射，对任意一点 $\boldsymbol{p} \in \mathscr{U}$，可以把 $\varphi_{\mathscr{U}}(\boldsymbol{p}) \in \mathscr{E}^n$ 的坐标定义为 $\boldsymbol{p}$ 点的坐标：

$$p^i = [\varphi_{\mathscr{U}}(\boldsymbol{p})]^i \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{3.1.2}$$

称 $p^i (i=1,\cdots,n)$ 为流形上 $\boldsymbol{p}$ 点的**局部坐标**，而 $(\mathscr{U}, \varphi_{\mathscr{U}})$ 则称为流形 $\mathscr{M}$ 上的**坐标卡**或**局部坐标系**.

一方面，n 维流形 $\mathscr{M}$ 局部与 $\mathscr{E}^n$ 同胚；另一方面，一般不能将整个流形 $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{E}^n$ 的开集同胚. 例如，二维球面 $\mathscr{S}^2$ 至少需用两个同胚于 $\mathscr{E}^2$ 的开集来覆盖. 若整个流形 $\mathscr{M}$ 需用一族开集 $\{\mathscr{U}_\alpha\}$ 来覆盖：

$$\bigcup_\alpha \mathscr{U}_\alpha \supset \mathscr{M}, \tag{3.1.3}$$

则开集族 $\{\mathscr{U}_\alpha\}$ 称为流形的**开覆盖**，而所有的坐标卡的集合

$$\mathscr{A} = \{(\mathscr{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\} \tag{3.1.4}$$

称为流形的**坐标卡集**.

设 $(\mathscr{U}, \varphi_{\mathscr{U}})$ 与 $(\mathscr{V}, \varphi_{\mathscr{V}})$ 是坐标卡集 $\mathscr{A}$ 中的两个坐标卡，若 $\mathscr{U} \cap \mathscr{V} \neq \varnothing$，则 $\varphi_{\mathscr{U}}(\mathscr{U} \cap \mathscr{V})$ 与 $\varphi_{\mathscr{V}}(\mathscr{U} \cap \mathscr{V})$ 是 $\mathscr{E}^n$ 中的两个非空开集，并且映射

$$\varphi_{\mathscr{V}} \circ \varphi_{\mathscr{U}}^{-1}: \varphi_{\mathscr{U}}(\mathscr{U} \cap \mathscr{V}) \to \varphi_{\mathscr{V}}(\mathscr{U} \cap \mathscr{V}) \tag{3.1.5}$$

建立了这两个开集之间的同胚映射，其逆映射是 $\varphi_{\mathscr{U}} \circ \varphi_{\mathscr{V}}^{-1}$. 由于上述映射是从 $\mathscr{E}^n$ 的开集到另一个开集之间的映射，因此用坐标卡表示时它们分别为 $\mathscr{E}^n$ 的开集上的 n 个实值函数：

$$\begin{cases} y^i = f^i(x^1, \cdots, x^n) = [(\varphi_{\mathscr{V}} \circ \varphi_{\mathscr{U}}^{-1})(x^1, \cdots, x^n)]^i, \\ \qquad (x^1, \cdots, x^n) \in \varphi_{\mathscr{U}}(\mathscr{U} \cap \mathscr{V}), \\ x^i = g^i(y^1, \cdots, y^n) = [(\varphi_{\mathscr{U}} \circ \varphi_{\mathscr{V}}^{-1})(y^1, \cdots, y^n)]^i, \\ \qquad (y^1, \cdots, y^n) \in \varphi_{\mathscr{V}}(\mathscr{U} \cap \mathscr{V}), \end{cases} \tag{3.1.6}$$

并且由于同胚映射的性质，f^i 与 $g^i (i=1,2,\cdots,n)$ 是互逆的连续函数.

我们称两个坐标卡 $(\mathscr{U}, \varphi_{\mathscr{U}})$ 与 $(\mathscr{V}, \varphi_{\mathscr{V}})$ 是 C^k **相容**的，如果 $\mathscr{U} \cap \mathscr{V} = \varnothing$，或者当 $\mathscr{U} \cap \mathscr{V} \neq \varnothing$ 时，f^i 与 g^i 都是 C^k 的.

有了流形上的坐标卡及其坐标卡相容性的定义，下面我们来介绍流形上的微分结构这一概念. 流形上的微分结构体现了流形的开覆盖中各开集是如何黏结在一起的，揭示了流形整体的平滑程度.

定义 3.3　设 $\mathscr{M}$ 是一个 n 维流形. 如果流形 $\mathscr{M}$ 上给定一个坐标卡集 $\mathscr{A}=\{(\mathscr{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，满足：

(1) $\{\mathscr{U}_\alpha\}$ 为 $\mathscr{M}$ 的一个开覆盖；

(2) $\mathscr{A}$ 中任意两个坐标卡是 C^k 相容的；

(3) $\mathscr{A}$ 是极大的，即：如果 $(\mathscr{U},\varphi)$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个坐标卡，并与 $\mathscr{A}$ 中每一个坐标卡均为 C^k 相容，则 $(\mathscr{U},\varphi)$ 必属于 $\mathscr{A}$，

则称 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个 C^k **微分结构**.

若流形 $\mathscr{M}$ 上给定了一个 C^k 微分结构，则称 $\mathscr{M}$ 是 C^k **微分流形**，简称为 C^k**流形**. 若流形 $\mathscr{M}$ 上给定一个 C^∞ 微分结构，则称 $\mathscr{M}$ 为**光滑流形**或**微分流形**. 当 $\mathscr{M}$ 上给定了一个 C^ω 微分结构时，流形 $\mathscr{M}$ 称为**实解析流形**. 我们主要讨论光滑流形，因此以后常把光滑流形简称为流形.

在光滑流形上，定义光滑函数是有意义的. 设 f 是定义在光滑流形 $\mathscr{M}$ 上的实值函数. 若点 $\boldsymbol{p}\in\mathscr{M}$，坐标卡 $(\mathscr{U},\varphi_{\mathscr{U}})$ 是 $\mathscr{M}$ 上包含点 $\boldsymbol{p}$ 的坐标卡，则 $f\circ\varphi_{\mathscr{U}}^{-1}$ 是定义在 $\mathscr{E}^n$ 中开集 $\varphi_{\mathscr{U}}(\mathscr{U})$ 上的实值函数. 如果函数 $f\circ\varphi_{\mathscr{U}}^{-1}$ 在点 $\varphi_{\mathscr{U}}(\boldsymbol{p})\in\mathscr{E}^n$ 是 C^∞ 的，则称函数 f 在点 $\boldsymbol{p}\in\mathscr{M}$ 是 C^∞ 的.

上述定义的函数 f 在点 $\boldsymbol{p}\in\mathscr{M}$ 的光滑性与坐标卡的选择是无关的. 事实上，若 $(\mathscr{V},\varphi_{\mathscr{V}})$ 也是包含点 $\boldsymbol{p}$ 的坐标卡，则 $\mathscr{U}\cap\mathscr{V}\neq\varnothing$，且

$$f\circ\varphi_{\mathscr{V}}^{-1}=(f\circ\varphi_{\mathscr{U}}^{-1})\circ(\varphi_{\mathscr{U}}\circ\varphi_{\mathscr{V}}^{-1}). \tag{3.1.7}$$

因为 $\varphi_{\mathscr{U}}\circ\varphi_{\mathscr{V}}^{-1}$ 是光滑的，因此 $f\circ\varphi_{\mathscr{V}}^{-1}$ 与 $f\circ\varphi_{\mathscr{U}}^{-1}$ 在对应点上的光滑性是等同的.

若 f 在 $\mathscr{M}$ 中是处处 C^∞ 的，则称 f 是 $\mathscr{M}$ 上的**光滑函数**. $\mathscr{M}$ 上全体光滑函数记做 $C^\infty(\mathscr{M})$.

光滑函数实际上是定义在光滑流形 $\mathscr{M}$ 与实数集 $\mathbb{R}$ 之间的光滑

映射. 推而广之,可以定义两个光滑流形之间的光滑映射.

定义 3.4　设 f 是光滑流形 $\mathcal{M}$ 到另一个光滑流形 $\mathcal{N}$ 上的连续映射,$\mathcal{M}$ 是 m 维的,$\mathcal{N}$ 是 n 维的. 若对于 $\boldsymbol{p}\in\mathcal{M}$,存在点 $\boldsymbol{p}$ 的坐标卡 $(\mathcal{U},\varphi_{\mathcal{U}})$ 和点 $f(\boldsymbol{p})$ 的坐标卡 $(\mathcal{V},\psi_{\mathcal{V}})$,使得映射

$$\psi_{\mathcal{V}}\circ f\circ\varphi_{\mathcal{U}}^{-1}:\varphi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})\to\psi_{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$$

在点 $\varphi_{\mathcal{U}}(\boldsymbol{p})$ 上是 C^∞ 的,则称映射 f 在点 $\boldsymbol{p}$ 是 C^∞ 的. 若映射 f 在 $\mathcal{M}$ 的每一点都是 C^∞ 的,则称 f 是从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的**光滑映射**.

当光滑流形 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的维数相同,且 f 为同胚映射时,若进一步假设 f 是光滑映射,则称 f 为流形 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 之间的**微分同胚映射**,而称光滑流形 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是**微分同胚**的.

最后介绍两个流形的乘积流形的概念.

定义 3.5　设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是两个光滑流形,$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的坐标卡集分别为 $\{\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha\}$ 和 $\{\mathcal{V}_\beta,\psi_\beta\}$,则 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的乘积空间上的坐标卡集

$$\{\mathcal{U}_\alpha\times\mathcal{V}_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta\}$$

决定的光滑微分结构使 $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ 为 $m+n$ 维光滑流形,称为 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 的**乘积流形**.

乘积流形到各乘积因子有自然的投影:

$$\Pi_1:\mathcal{M}\times\mathcal{N}\to\mathcal{M};\quad \Pi_2:\mathcal{M}\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}.$$

因此 $\varphi_\alpha\times\psi_\beta$ 也可记做

$$\varphi_\alpha\times\psi_\beta=\varphi_\alpha\circ\Pi_1\oplus\psi_\beta\circ\Pi_2:\mathcal{M}\times\mathcal{N}\to\mathcal{E}^{m+n}.$$

例如,三维空间中的圆柱面是乘积流形 $\mathcal{S}^1\times\mathcal{E}^1$,二维环面则是乘积流形 $\mathcal{S}^1\times\mathcal{S}^1=\mathcal{T}^2$.

为了方便大家对坐标卡集有一个直观的印象,下面我们对二维球面写出坐标卡集.

对于二维球面

$$\mathcal{S}^2=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1\},$$

可用两个开集覆盖之:

$$\begin{cases}\mathcal{U}_+=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1,z\neq-1\}=\mathcal{S}^2\backslash\{(0,0,-1)\},\\ \mathcal{U}_-=\mathcal{S}^2\backslash\{(0,0,1)\}.\end{cases}$$

设

$$\begin{cases} \varphi_+ : (x,y,z) \mapsto \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z}\right) = (u^1, v^1), \\ \varphi_- : (x,y,z) \mapsto \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}\right) = (u^2, v^2) \end{cases}$$

为球极平面投影映射，它们建立了带孔球面 $\mathscr{U}_+$ 和 $\mathscr{U}_-$ 与平面之间的同胚映射. 容易证明 (u^1, v^1) 与 (u^2, v^2) 之间的函数关系是解析的，因此上述微分结构组成的 $\mathscr{S}^2$ 是解析流形.

§3.2　流形的切空间

在第二章中我们讨论了欧氏空间中子流形的切空间，如曲线的切线、曲面的切平面等. 在讨论变换群的时候，还给出了变换群与其切空间之间的指数映射. 从这些讨论我们看到，一旦清楚了曲面上一点切平面的性质，那么这一点的度量性质也就清楚了. 同样，曲面的弯曲性质也取决于曲面上相邻点的切平面变化. 确切一点说，流形上一点的邻近都可以用其切空间来近似. 为此，这一节中我们引进流形的切空间和余切空间.

一、切空间与切丛

为了讨论流形的切空间，先要定义流形上的曲线. 取 $\mathscr{E}^1$ 中的一个开区间 $\mathscr{N}=(a;b)$，则从 $\mathscr{N}$ 到流形 $\mathscr{M}$ 上的一个光滑映射

$$f: (a,b) \to \mathscr{M} \tag{3.2.1}$$

称为流形 $\mathscr{M}$ 上的一条**参数曲线**（**简称曲线**）.

在欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中，向量是有意义的. 对于微分流形 $\mathscr{M}$ 我们没有一般地定义向量，因此首要的问题是在流形上引入切向量的概念.

§3.1 中我们引入了流形上的光滑（实）函数，它们是与流形上的坐标选取无关的. 显然，流形 $\mathscr{M}$ 上的全体光滑函数的集合 $\mathscr{F}(\mathscr{M})$ 构成实数域上的代数. 对于流形 $\mathscr{M}$ 上的任一点 $\boldsymbol{p}$，记在点 $\boldsymbol{p}$ 的邻域

上的全体光滑函数的集合为 $\mathscr{F}_p(\mathscr{M})$. 可以利用作用在 $\mathscr{F}_p(\mathscr{M})$ 上的线性微分算子来定义流形 $\mathscr{M}$ 上过点 $\boldsymbol{p}$ 的切向量.

对微分流形 $\mathscr{M}$, 作一条经过点 $\boldsymbol{p}$ 的光滑曲线 $\boldsymbol{x}(t)$, 无妨设 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{p}$, 利用这条曲线我们就可以选定过点 $\boldsymbol{p}$ 的一个确定的切向量.

对于任意给定的光滑函数 $f\in\mathscr{F}_p(\mathscr{M})$, 将此函数限制在光滑曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 上, 可以得到关于参数 t 的一个光滑函数 $f(\boldsymbol{x}(t))$, 该函数在点 $\boldsymbol{p}$ 沿曲线的变化率为

$$\boldsymbol{X}_p f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\boldsymbol{x}(t))\bigg|_{t=0}. \tag{3.2.2}$$

一般地, 我们将作用在任意光滑函数上的线性微分算子

$$\boldsymbol{X}_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_p \tag{3.2.3}$$

定义为切于流形的一个**切向量**. 实际上, 如此定义的切向量是 $\mathscr{E}^n$ 中方向导数的推广.

若在流形 $\mathscr{M}$ 上点 $\boldsymbol{p}$ 的邻域中选取了局部坐标 $\boldsymbol{x}=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$, 这时(3.2.2)式可表示为

$$\boldsymbol{X}_p f = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{t=0}. \tag{3.2.4}$$

若我们选取过点 $\boldsymbol{p}$ 的曲线为 $x^j=t$, 即坐标线 x^j, 则得到沿坐标线的切向量 $\partial_j=\dfrac{\partial}{\partial x^j}$. 由(3.2.4)式知, 过点 $\boldsymbol{p}$ 沿任意确定方向的切向量为 $\{\partial_j\}$ 的线性组合. 集合 $\{\partial_j\}$ 称为切向量 $\boldsymbol{X}_p$ 在局部坐标系中的**基底**, 而 $\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\bigg|_p$ 则称为 $\boldsymbol{X}_p$ 在该局部坐标系中的**分量**.

由上面的定义我们注意到, 切向量 $\boldsymbol{X}_p$ 是与局部坐标系无关的, 其分量与基底则与局部坐标的选取有关. 如选定新的局部坐标系 $\{\tilde{x}^{i'}\}$, 则有

$$\begin{cases}\partial_{i'} = \dfrac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{i'}}\partial_j, \ \dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{j'}}\dfrac{\mathrm{d}\tilde{x}^{j'}}{\mathrm{d}t}, \\ \partial_i = \dfrac{\partial \tilde{x}^{j'}}{\partial x^i}\partial_{j'}, \ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{x}^{i'}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial \tilde{x}^{i'}}{\partial x^j}\dfrac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}.\end{cases} \tag{3.2.5}$$

这就是切向量的基底和分量在坐标变换下的规律. 注意到这些规律与第一章所讨论的 n 维线性空间中向量的变换规律是一致的.

上面我们利用通过点 $\boldsymbol{p}$ 的曲线 $\boldsymbol{x}(t)$ 定义了沿曲线的切向量 $\boldsymbol{X}_p$；反过来，对于给定点 $\boldsymbol{p}$ 的任一线性组合

$$\boldsymbol{Y} = \eta^i(\boldsymbol{x})\partial_i, \quad \eta^i(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{F}_p(\mathscr{M}), \tag{3.2.6}$$

可以证明它必为某一过点 $\boldsymbol{p}$ 的曲线的切向量，即流形 $\mathscr{M}$ 的切向量. 如，可选曲线

$$x^i = x^i(\boldsymbol{p}) + \eta^i(\boldsymbol{x})t, \tag{3.2.7}$$

显然该曲线的切向量就是(3.2.6)式.

过流形 $\mathscr{M}$ 上点 $\boldsymbol{p}$ 的所有切向量的全体构成流形 $\mathscr{M}$ 在点 $\boldsymbol{p}$ 的**切空间** $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$. 在 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 中可定义向量的加法(对应局部坐标中分量相加)和向量的数乘(分量乘同一实数)，并且可以证明 $\{\partial_i\}$ 是线性无关的，同时还是极大的. 因此流形 $\mathscr{M}$ 上点 $\boldsymbol{p}$ 的切空间 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 为 n 维线性空间.

由于流形上的任一点可定义一切空间，我们将流形 $\mathscr{M}$ 上所有点的切空间的并集

$$\mathscr{T}(\mathscr{M}) = \bigcup_{p\in\mathscr{M}} \mathscr{T}_p(\mathscr{M}) \tag{3.2.8}$$

称为流形 $\mathscr{M}$ 的**切丛**.

切丛 $\mathscr{T}(\mathscr{M})$ 是一个 $2n$ 维的空间，并且是一个流形. 在每一个局部 $\mathscr{T}(\mathscr{M})$ 是 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 的直积，但整体上看却不是，因为不同点的切向量之间是没有关系的. 切丛与流形 $\mathscr{M}$ 之间存在一个自然的投影关系：

$$\Pi: \mathscr{T}(\mathscr{M}) \to \mathscr{M}, \quad (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{X}_p) \mapsto \boldsymbol{p}. \tag{3.2.9}$$

因此如果将切向量 $\boldsymbol{X}_p$ 看做是定义在点 $\boldsymbol{p}$ 的一根“纤维”的话，点 $\boldsymbol{p}$ 就是这根“纤维”的“根”.

有了切空间与切丛的概念，可以定义流形上的向量场. 流形 $\mathscr{M}$ 上的向量场 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 又称为切丛的一个**截面**，它是在流形 $\mathscr{M}$ 上每点 $\boldsymbol{p}$ 的切空间 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 中选定一个切向量 $\boldsymbol{X}_p$ 组成的. 当给定流形上的坐

标卡集以后，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$可表示为

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = \xi^i(\boldsymbol{x})\partial_i, \tag{3.2.10}$$

其中每一$\xi^i(\boldsymbol{x})$为实函数.

流形$\mathscr{M}$上的可微向量场$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$可看做是作用在流形中全体光滑函数$\mathscr{F}(\mathscr{M})$上的线性微分算子，它满足线性性质和微分运算的Leibniz法则.

流形$\mathscr{M}$上全体可微向量场的集合$\mathscr{X}(\mathscr{M})$可以构成实数域上的Lie代数. 关于这一点将在第五章中讨论.

二、余切空间与余切丛

前面提到流形$\mathscr{M}$上一点$\boldsymbol{p}$的切空间$T_{\boldsymbol{p}}(\mathscr{M})$是一$n$维空间，按照第一章中的讨论，可以定义该空间的对偶空间：

$$\mathscr{T}_p^*(\mathscr{M}) = \{\sigma_p : \sigma_p(\boldsymbol{X}_p) \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{X}_p \in \mathscr{T}_p(\mathscr{M})\}. \tag{3.2.11}$$

σ_p称为流形$\mathscr{M}$上点$\boldsymbol{p}$的一个**余切向量**.

我们已经分析了如何在流形$\mathscr{M}$上通过一条曲线来选择$\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$中的向量，下面分析如何在$\mathscr{T}_p^*(\mathscr{M})$中选取一个余切向量$\sigma_p \in T_p^*(\mathscr{M})$.

我们知道$\mathscr{F}_p(\mathscr{M})$为$\mathscr{M}$中点$\boldsymbol{p}$的邻域内全体光滑函数的集合. 设$\mathscr{S}_p$为$\mathscr{F}_p(\mathscr{M})$的一个子集合，$\mathscr{S}_p$中的函数$f$称为在点$\boldsymbol{p}$**平稳**的，如果满足：存在一个包含点$\boldsymbol{p}$的坐标卡$(\mathscr{U},\varphi)$，使函数$f\circ\varphi^{-1}$的所有各阶偏导数在$\varphi(\boldsymbol{p})$处为零. 因此，对于$\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$中的任意切向量$\boldsymbol{X}_p$，有

$$\boldsymbol{X}_p : \mathscr{S}_p \to \{0\}. \tag{3.2.12}$$

为了选出在点$\boldsymbol{p}$与切空间$\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$对偶的一个余切向量，令$f \in \mathscr{F}_p(\mathscr{M}) \backslash \mathscr{S}_p$，定义线性映射：

$$\mathrm{d}f : \mathscr{T}_p(\mathscr{M}) \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{X}_p \mapsto \boldsymbol{X}_p f\,|_p \in \mathbb{R}. \tag{3.2.13}$$

此映射也可记为

$$\langle \mathrm{d}f, \boldsymbol{X}_p \rangle = \boldsymbol{X}_p f. \tag{3.2.14}$$

这样定义的余切向量称为函数的**全微分**，它将$\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$中的任一元

素映射为实数.

当在点 p 邻域中给定局部坐标系$\{x^i\}$时，切空间 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$的基底为$\{\partial_i\}$. 若令 f 为某一坐标曲线，即 $f=x^j$，则

$$\langle \mathrm{d}x^j, \partial_i \rangle = \partial_i x^j = \delta_i^j. \tag{3.2.15}$$

因此我们选择$\{\mathrm{d}x^j\}$为余切空间 $\mathscr{T}_p^*(\mathscr{M})$中与切空间 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$的基底$\{\partial_i\}$对偶的基底. 显然$\{\mathrm{d}x^j\}$是 n 个极大线性无关的余切向量. 而对 $\forall f \in \mathscr{F}_p(\mathscr{M}) \backslash \mathscr{S}_p$，有

$$\langle \mathrm{d}f, \partial_i \rangle = \partial_i f = \langle \mathrm{d}x^j, \partial_i \rangle \partial_j f,$$

即有

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j. \tag{3.2.16}$$

这也就是为什么余切向量是函数的全微分.

我们知道，$\mathscr{T}_p^*(\mathscr{M})$中任一余切向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 可表示为基底$\{\mathrm{d}x^j\}$的线性组合：

$$\boldsymbol{\sigma} = a_i \mathrm{d}x^i, \tag{3.2.17}$$

这里 a_i 为 n 个任意光滑实函数，不一定为某函数 f 的偏导数. $\boldsymbol{\sigma}$ 对 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$中一切向量 $\boldsymbol{X}=\xi^i\partial_i$ 的作用为

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{X} \rangle = a_i \xi^i. \tag{3.2.18}$$

可以看出，上述关于余切空间及余切向量的讨论均平行于第一章中关于向量空间的对偶空间及对偶向量的讨论.

同流形 $\mathscr{M}$ 的切丛 $\mathscr{T}(\mathscr{M})$的引进一样，我们可以引进流形 $\mathscr{M}$ 上的余切丛为

$$\mathscr{T}^*(\mathscr{M}) = \bigcup_{p \in \mathscr{M}} \mathscr{T}_p^*(\mathscr{M}). \tag{3.2.19}$$

显然余切丛也是一个 $2n$ 维的流形.

余切向量场定义为余切丛 $\mathscr{T}^*(\mathscr{M})$上的一个截面，即在流形 $\mathscr{M}$ 上每一点 p 给出一个余切向量 $\boldsymbol{\sigma}_p \in \mathscr{T}_p^*(\mathscr{M})$. 当在点 p 的邻域选定局部坐标 $\boldsymbol{x}=(x^1, \cdots, x^n)$时，余切向量场表示为

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \sigma_i(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x^i, \quad \sigma_i(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{F}(\mathscr{M}). \tag{3.2.20}$$

可微余切向量场又称为线性微分形式，下一章中我们将讨论它. $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ 的全体一般记做 $\Sigma(\mathscr{M})$.

这里需要着重指出的是，余切空间虽然与切空间线性对偶，代数上是同构的，但在流形上，切向量场与余切向量场有显著的不同，主要表现在其分析性质上.

切向量场与余切向量场均是流形上与坐标无关的量，在坐标变换时，其分量的变换规律与第一章中关于向量的变换规律是一样的.

三、流形上的张量

类似于第一章中张量的引进，对于线性空间 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 及其对偶空间 $\mathscr{T}_p^*(\mathscr{M})$，可以定义其上的张量 $\boldsymbol{K}$ 为一个多重线性函数：

$$\boldsymbol{K}:\ \underbrace{\mathscr{T}_p^*(\mathscr{M}),\cdots,\mathscr{T}_p^*(\mathscr{M})}_{r\text{个}},\underbrace{\mathscr{T}_p(\mathscr{M}),\cdots,\mathscr{T}_p(\mathscr{M})}_{s\text{个}} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_1(\boldsymbol{p}),\cdots,\boldsymbol{\sigma}_r(\boldsymbol{p}),\boldsymbol{X}_p^1,\cdots,\boldsymbol{X}_p^s \longmapsto \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\sigma}_1,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_r,\boldsymbol{X}_p^1,\cdots,\boldsymbol{X}_p^s)\in\mathbb{R}. \tag{3.2.21}$$

由(3.2.21)式表示的张量 $\boldsymbol{K}$ 称为流形 $\mathscr{M}$ 上点 $\boldsymbol{p}$ 的(r,s)**阶张量**. 所有第一章中关于张量的代数性质的讨论均可平行地移到流形中的张量上来进行. n 维流形 $\mathscr{M}$ 上点 $\boldsymbol{p}$ 的全体(r,s)阶张量组成一个 n^{r+s}维的线性向量空间，记做 $\mathscr{T}_s^r(\boldsymbol{p})$.

同切丛和余切丛的定义一样，流形 $\mathscr{M}$ 上各点的 $\mathscr{T}_s^r(\boldsymbol{p})$的并集

$$\mathscr{T}_s^r(\mathscr{M}) = \bigcup_{p\in\mathscr{M}}\mathscr{T}_s^r(\boldsymbol{p}) \tag{3.2.22}$$

称为流形 $\mathscr{M}$ 上的(r,s)**阶张量丛**. 而(r,s)阶张量场 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$则定义为 $\mathscr{T}_s^r(\mathscr{M})$的一个截面.

有了张量场的定义，结合流形上的局部坐标卡，则第二章中关于张量的绝对微商的讨论也可以移到这里来. 不过在这里，我们并未引进流形上的度量，因此绝对微商是取决于流形上的联络系数的，即在流形上还应预先给定一个附加的结构 Γ_{ij}^k(Γ_{ij}^k是 $\mathscr{M}$ 上的 n^3

个函数，在流形上的局部坐标中，坐标变换时满足第二章中给出的坐标变换关系(2.1.21)式).

§3.3　子流形与 Riemann 流形

一、流形间光滑映射的诱导映射

设有 m 维光滑流形 $\mathscr{M}$ 和 n 维光滑流形 $\mathscr{N}$，而 $\boldsymbol{F}$ 是由 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{N}$ 的一个光滑映射. 由于光滑流形上的点与其切空间和余切空间均是一一对应的，因此由映射 $\boldsymbol{F}$ 可以诱导出两个流形上对应点的切空间及余切空间的两个映射. 下面我们就来讨论这两个诱导映射的定义及性质.

设 $\boldsymbol{F}: \mathscr{M}\to\mathscr{N}, \boldsymbol{p}\in\mathscr{M}\mapsto\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})\in\mathscr{N}$，我们可利用此映射将点 $\boldsymbol{p}$ 的切空间和点 $\boldsymbol{q}$ 的切空间联系起来. 设 $\boldsymbol{X}\in\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$，则在点 $\boldsymbol{p}$ 的局部坐标 $\boldsymbol{x}$ 中，有

$$\boldsymbol{F}_*: \boldsymbol{X} = \xi^i(\boldsymbol{x})\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \mapsto \boldsymbol{F}_*\boldsymbol{X} = \xi^i(\boldsymbol{x})\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_q, \tag{3.3.1}$$

这里 $\boldsymbol{y}$ 是点 $\boldsymbol{q}$ 的局部坐标；i 从 1 到 m 约定求和，而 k 从 1 到 n 约定求和. $\boldsymbol{F}_*$ 称为映射 $\boldsymbol{F}$ 的**切映射**. 从(3.3.1)式可看出，切映射 $\boldsymbol{F}_*$ 将 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 映射到 $\mathscr{T}_q(\mathscr{M})$，即将相应的切空间对应.

流形间的光滑映射还可诱导出余切空间的**拖回映射**：

$$\boldsymbol{F}^*: \mathscr{T}_q^*(\mathscr{N}) \to \mathscr{T}_p^*(\mathscr{M}).$$

对任给 $\mathscr{T}_q^*(\mathscr{N})$ 中的余切向量 $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{T}_q^*(\mathscr{N})$，在局部坐标中有

$$\boldsymbol{F}^*: \boldsymbol{\sigma} = a_k\mathrm{d}y^k\in\mathscr{T}_q^*(\mathscr{N}) \mapsto \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{\sigma} = a_k(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\in\mathscr{T}_p^*(\mathscr{M}). \tag{3.3.2}$$

可以证明，切映射 $\boldsymbol{F}_*$ 和拖回映射 $\boldsymbol{F}^*$ 均是线性映射. 拖回映射 $\boldsymbol{F}^*$ 还可以推广到流形上余切空间中的外形式(反称的协变张量)上，

这一点在以后讨论外微分时会进一步说明.

另外,切映射与拖回映射之间是互为对偶的,即对于任给 $\boldsymbol{X}\in \mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 和 $\sigma\in\mathscr{T}_q^*(\mathscr{N})$,有

$$\langle \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{X}\rangle_p=\langle \boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{F}_*\boldsymbol{X}\rangle_{q=F(p)}. \tag{3.3.3}$$

注意上式两端为不同流形上的函数:

$$\langle \boldsymbol{F}^*\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{X}\rangle\in\mathscr{F}(\mathscr{M}),\quad \langle \boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{F}_*\boldsymbol{X}\rangle\in\mathscr{F}(\mathscr{N}),$$

但它们在对应点 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$ 上的函数值是相同的.

最后定义映射 $\boldsymbol{F}$ 的秩.在点 $\boldsymbol{p}$ 的局部坐标卡$(\mathscr{U},\varphi)$和点 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})$的局部坐标卡$(\mathscr{V},\psi)$中,函数

$$\psi\circ\boldsymbol{F}\circ\varphi^{-1}:\varphi(\mathscr{U})\in\mathbb{R}^m\mapsto\psi(\mathscr{V})\in\mathbb{R}^n$$

的 Jacobi 矩阵的秩称为映射 $\boldsymbol{F}$ 在点 $\boldsymbol{p}$ 的**秩**.显然这样定义的秩也就是线性空间 $\boldsymbol{F}_*(\mathscr{T}_p(\mathscr{M}))\subset\mathscr{T}_q(\mathscr{N})$的维数.

二、子流形

在第二章中我们曾定义过欧氏空间的子流形.用流形的语言来说,欧氏空间的子流形实际上是它的一个子集,这个子集的每一个局部开集都与另一个低维欧氏空间中的开集同胚.类似这个方法,这里我们来引进子流形的概念.

定义 3.6 设 $\mathscr{M}$ 和 $\mathscr{N}$ 分别是 m 维和 n 维光滑流形.若存在光滑映射 $\boldsymbol{F}:\mathscr{M}\to\mathscr{N}$,使得

(1) 对 $\forall\,\boldsymbol{p}\in\mathscr{M}$,映射 $\boldsymbol{F}$ 均为满秩的,即 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{F})=m\leqslant n$,则称 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{N}$ 中的一个**浸入**,而称 $\mathscr{M}$ 在 $\boldsymbol{F}$ 下为 $\mathscr{N}$ 的一个**浸入子流形**,记为$(\boldsymbol{F},\mathscr{M})$.

(2) 映射 $\boldsymbol{F}$ 为满秩的条件下是单一映射,则称 $\boldsymbol{F}$ 是 $\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{N}$ 中的一个**嵌入**,$(\boldsymbol{F},\mathscr{M})$为 $\mathscr{N}$ 的一个**嵌入子流形**.

(3) 当 $\boldsymbol{F}$ 是嵌入,并且 $\boldsymbol{F}:\mathscr{M}\to\boldsymbol{F}(\mathscr{M})\subset\mathscr{N}$ 还是同胚映射时,则称 $\boldsymbol{F}$ 为 $\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{N}$ 中的**正则嵌入**,而称 $\mathscr{M}$ 在 $\boldsymbol{F}$ 下为 $\mathscr{N}$ 的**正则子流形**,记为$(\boldsymbol{F},\mathscr{M})$.

浸入在局部是单一的映射(这一点由满秩决定),但在大范围

则不一定单一. 因此,浸入子流形和嵌入子流形的区别在于像集 $\boldsymbol{F}(\mathscr{M})$在 $\mathscr{N}$中是否有自交点,而正则嵌入与嵌入的区别在于映射 $\boldsymbol{F}$ 的逆映射是否连续.

定义 3.6 看起来十分抽象,下面举几个例子来使我们的概念具体化.

例 1　光滑流形 $\mathscr{N}$的任意开子集 $\mathscr{M}$在赋予了与 $\mathscr{N}$相同的微分结构以后成为一个与 $\mathscr{N}$维数相同的光滑流形. 设$(\mathscr{U},\varphi)$是 $\mathscr{N}$的一个坐标卡,则$(\mathscr{U}\cap\mathscr{M},\varphi)$给出了 $\mathscr{M}$ 的一个坐标卡,因此 $\mathscr{M}$ 也是一个 n 维光滑流形. 这时若令映射 $\boldsymbol{F}$: $\mathscr{M}\to\mathscr{N}$为恒等映射,即将 $\mathscr{M}$ 中的点映射到 $\mathscr{N}$中与 $\mathscr{M}$ 中点相同的点,则$(\boldsymbol{F},\mathscr{M})$成为 $\mathscr{N}$的一个正则嵌入子流形,这个子流形也称为 $\mathscr{N}$的**开子流形**.

例 2　设$(\boldsymbol{F},\mathscr{M})$是光滑流形 $\mathscr{N}$的一个嵌入子流形. 若

(1) $\boldsymbol{F}(\mathscr{M})$是 $\mathscr{N}$的一个闭子集;

(2) 对于 $\forall\, \boldsymbol{q}\in \boldsymbol{F}(\mathscr{M})$,存在坐标卡$(\mathscr{V},\psi)$,使得在 $\boldsymbol{F}(\mathscr{M})\cap\mathscr{V}$中点的坐标$(y^1,\cdots,y^m,y^{m+1},\cdots,y^n)$满足

$$y^{m+1}=\cdots=y^n=0,$$

则称$(\boldsymbol{F},\mathscr{M})$是 $\mathscr{N}$的一个 m **维闭子流形**.

闭子流形很多. 如单位球面$\mathscr{S}^m\subset\mathscr{E}^{m+1}$及其恒等映射

$$\boldsymbol{F}:\ \mathscr{S}^m\to \boldsymbol{F}(\mathscr{S}^m)=\mathscr{S}^m\subset\mathscr{E}^{m+1}$$

给出了$\mathbb{R}^{m+1}$中的一个闭子流形. 闭子流形一定是正则的.

例 3　令 $\boldsymbol{F}$: $\mathscr{E}^1\to\mathscr{E}^2$,使得对 $\forall\, t\in\mathscr{E}^1$有

$$\boldsymbol{F}(t)=\left(2\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right),\ \sin 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right),\qquad(3.3.4)$$

则$(\boldsymbol{F},\mathscr{E}^1)$是 $\mathscr{E}^2$的一个浸入子流形,但不是嵌入子流形. 因为映射 $\boldsymbol{F}$ 的Jacobi 矩阵为

$$\left(-2\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right),\ 2\cos 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

对任意的 t 它的秩均为 1,同时$(2k\pi,2(k+1)\pi)\subset\mathscr{E}^1$对任意的 k 都映射到 $\mathscr{E}^2$中同一区域.

例 4　令 $\boldsymbol{F}$: $\mathscr{E}^1\to\mathscr{E}^2$,使得对 $\forall\, t\in\mathscr{E}^1$有

$$F(t)=\left(2\cos\left(2\tan^{-1}t+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin 2\left(2\tan^{-1}t+\frac{\pi}{2}\right)\right), \tag{3.3.5}$$

则$(\boldsymbol{F},\mathscr{E}^1)$构成了$\mathscr{E}^2$的一个嵌入子流形. 首先该映射的 Jacobi 矩阵为

$$\left(-\frac{4}{1+t^2}\sin\left(2\tan^{-1}t+\frac{\pi}{2}\right),\ \frac{4}{1+t^2}\cos 2\left(2\tan^{-1}t+\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

对于任意的t它的秩均为1;其次$\tan^{-1}t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,因而$\boldsymbol{F}(t)$是整体的单一映射.

例 5　设从$\mathscr{E}^1$到圆环面$\mathscr{T}^2$的光滑映射$\boldsymbol{F}$将$\mathscr{E}^1$映射为$\mathscr{T}^2$上的等距螺线. 当圆环面的外周长l与螺线的外螺距k之比$l:k$为有理数时,$\boldsymbol{F}$给出了从$\mathscr{E}^1$到$\mathscr{T}^2$的浸入;而当$l:k$为无理数时,$\boldsymbol{F}$给出了从$\mathscr{E}^1$到$\mathscr{T}^2$的嵌入. 但这时的像集$\boldsymbol{F}(\mathscr{E}^1)$在$\mathscr{T}^2$中是处处稠密的. 同时我们注意到该嵌入不是正则嵌入(其逆映射显然不连续).

在讨论子流形的时候,我们特别强调映射$\boldsymbol{F}$的作用,这是由于两个流形$\mathscr{M}$和$\mathscr{N}$之间的嵌入或浸入是不唯一的,可以由不同的映射$\boldsymbol{F}$来决定.

对于正则嵌入及正则子流形,有如下性质:

性质 1　设$(\boldsymbol{F},\mathscr{M})$是光滑流形$\mathscr{N}$的嵌入子流形,则$(\boldsymbol{F},\mathscr{M})$为$\mathscr{N}$的正则嵌入的充分必要条件是$(\boldsymbol{F},\mathscr{M})$是$\mathscr{N}$的某个开子流形的闭子流形.

性质 2　设$(\boldsymbol{F},\mathscr{M})$是光滑流形$\mathscr{N}$的嵌入子流形. 若流形$\mathscr{M}$是紧致的(通常紧致指$\mathscr{M}$的任一开覆盖存在有限子覆盖),则$\boldsymbol{F}$是$\mathscr{M}$到$\mathscr{N}$的正则嵌入.

上面两条性质是通常用来判断嵌入子流形是否正则的方法.

在子流形的讨论中,一个十分有兴趣的问题是:对于一个m维光滑流形$\mathscr{M}$,是否能找到一个n $(n>m)$维欧氏空间$\mathscr{E}^n$,使得存在从$\mathscr{M}$到$\mathscr{E}^n$中的嵌入? H. Whitney 证明了当$n=2m+1$时,嵌入总

是存在的.这里我们不打算证明它.这个结论说明了尽管流形的概念是欧氏空间的非常一般的推广,但最终仍可以作为欧氏空间的嵌入子流形.因此欧氏空间的子流形是十分重要的.

三、Riemann 流形

设 $\mathscr{M}$ 是 m 维光滑流形,$\boldsymbol{G}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的(0,2)阶张量场,即将两个切向量场线性映射到 $\mathscr{M}$ 上的光滑函数:

$$\boldsymbol{G}:\ \mathscr{T}(\mathscr{M})\times\mathscr{T}(\mathscr{M})\rightarrow\mathscr{F}(\mathscr{M}),\quad \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\mapsto\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}).\tag{3.3.6}$$

定义 3.7　若 m 维光滑流形 $\mathscr{M}$ 上给定了一个光滑的、处处正定的二阶对称协变张量场 $\boldsymbol{G}$,则称 $\mathscr{M}$ 为 **Riemann 流形**,而称 $\boldsymbol{G}$ 为流形 $\mathscr{M}$ 上的**度量张量**.这里对称的意思是指 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$,而正定则是指$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})\geqslant 0$,等号当且仅当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 时成立.

对于流形 $\mathscr{M}$ 上的点 $\boldsymbol{p}$,设局部坐标为$(\mathscr{U},\varphi)$,则度量张量为

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{G}(\xi^i\partial_i,\eta^j\partial_j)=\boldsymbol{G}(\partial_i,\partial_j)\xi^i\eta^j=g_{ij}\xi^i\eta^j,\tag{3.3.7}$$

因此 $\boldsymbol{G}$ 在局部坐标中的表示为

$$\boldsymbol{G}=g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j.\tag{3.3.8}$$

若度量张量只是对称、非退化的,则称其为**伪 Riemann 度量**,而称 $\mathscr{M}$ 为**伪 Riemann 流形**.

有了流形上的度量,切向量的长度就可以由之定义,同样一点的两个切向量的夹角也可以定义.另外,对于流形上的曲线段,可以求其弧长.这些量的定义方式与第一、二两章所讨论的是一致的.

一般地,一个光滑流形上一定可以定义 Riemann 度量.这是由于流形的局部同胚于欧氏空间.关于这个结论的证明,请参看陈省身著的《微分几何讲义》.从张量丛的观点来看,流形上存在 Riemann 度量,说明流形上的二阶协变张量丛一定存在正定的光滑截面.

光滑流形上引入了 Riemann 度量以后，第二章对欧氏空间及其子流形的讨论就可以平行地移到一般的 Riemann 流形上来. 如在局部坐标中可以引入标架的微分，与度量张量对应的联络系数，以及流形上张量场的绝对微商，等等. 这些量的计算公式与第二章所讨论的问题是完全一样的，这里不再赘述.

四、Riemann 流形中向量的平行

一般地，流形上不同点的切空间之间是不同的，因而定义在不同点的切向量之间是不能比较的. 但是在欧氏空间中，由于可以采用一种统一的整体坐标，不同点上向量是可以判断是否平行的. 这个概念可以推广到 Riemann 流形上来.

定义 3.8　设 $\gamma: \mathscr{E}^1 \to \mathscr{M}$ 是流形 $\mathscr{M}$ 上的某一参数曲线，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ 是流形上的切向量场，在局部坐标系 $\{x^i\}$ 中，γ: $x^i = x^i(t)$，$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}(t)) = \alpha^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_\gamma$. 若

$$\dot{x}^i \nabla_i \alpha^k(x(t))\,|_\gamma = \dot{x}^i \left(\frac{\partial \alpha^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij}\alpha^j\right)\bigg|_\gamma \equiv 0, \qquad (3.3.9)$$

则称**切向量场 $\boldsymbol{X}$ 沿曲线 γ 是平行的**.

也就是说，切向量场 $\boldsymbol{X}$ 沿曲线 γ 平行是指它沿曲线的切向量场的方向导数为零.

同样可以定义张量的平行. 有了向量的平行，Riemann 流形上的测地线就定义为曲线的切向量沿曲线的方向导数为零的曲线，它在局部坐标系 $\{x^i\}$ 中可表示为

$$\ddot{x}^i(t) + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j(t)\dot{x}^k(t) = 0. \qquad (3.3.10)$$

这是一个二阶方程，因此过流形 $\mathscr{M}$ 上任意一点恰好有一条测地线在该点与任意给定的已知切向量相切.

类似于曲面上测地线坐标的引进，在 Riemann 流形上同样可以引入局部的测地线坐标，也称为 **Riemann 坐标**，这里就不作仔细的讨论.

§ 3.4　Riemann 曲率张量

一、曲率张量的引进

在流形上分析张量场时，必然要与张量场的微商打交道. 由第二章关于张量的绝对微商的知识我们知道，在局部坐标系中，张量的绝对微商只与空间中的联络系数 Γ_{ij}^{k} 有关. 因此，在流形上，如果我们在它的每个局部坐标中给定相容的一组联络系数 Γ_{ij}^{k}（n^3 个独立的函数），并规定在坐标转换时 Γ_{ij}^{k} 满足第二章中(2.1.21)式所给出的转换关系，则任意的张量场就可以进行绝对微商的运算了.

在给定了度量张量(g_{ij})的 Riemann 流形上，联络系数Γ_{ij}^{k}与度量系数 g_{ij} 有关. 这个关系在局部坐标中的表示就是：

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j}+g_{jl,i}-g_{ij,l}).\qquad(3.4.1)$$

如果我们考虑的流形是 n 维的，则 g_{ij} 一共含有$\dfrac{n(n+1)}{2}$个函数（考虑了对称性）. 在 Riemann 流形上，联络系数 Γ_{ij}^{k} 考虑对称性也还含有$\dfrac{n^2(n+1)}{2}$个函数. 可见 Γ_{ij}^{k} 的各分量之间还应满足某种内在联系. 换一种说法就是，若在流形上给定了一个对称的联络系数 Γ_{ij}^{k}，则要在该流形上定义一个满足(3.4.1)式的度量张量，联络系数 Γ_{ij}^{k} 必然还应满足一组协调条件. 下面我们就来讨论这组条件，并由此引进曲率张量的概念.

对于一个标量函数 f，在局部坐标中，若令 $\varphi_i=\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$，则一定有 $\varphi_{i,j}=\varphi_{j,i}$，即二次微商是可交换的. 但在 Riemann 流形上（或更一般地，在给定了 Γ_{ij}^{k} 的光滑流形上），向量场或张量场的绝对微商不再可交换. 事实上，对于 Riemann 流形上的切向量场$\{v^i\}$，有

$$\nabla_l\nabla_k v^i=\nabla_l(v_k^i+\Gamma_{jk}^{i}v^j)$$

$$= (v_k^i + \Gamma_{jk}^i v^j)_l + \Gamma_{hl}^i (v_{,k}^h + \Gamma_{jk}^h v^j) - \Gamma_{kl}^h (v_h^i + \Gamma_{jh}^i v^j).$$

(3.4.2)

上式交换绝对微商之次序后与原式相减,得

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) v^i = (\Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i) v^j + (\Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h - \Gamma_{hl}^i \Gamma_{jk}^h) v^j$$

$$\overset{\text{记为}}{=\!=\!=} - R_{jkl}^i v^j, \tag{3.4.3}$$

其中第一个等式用到了 Γ_{ij}^k 下标的对称性.我们称(R_{jkl}^i)为 **Riemann 曲率张量**:

$$- R_{jkl}^i = \Gamma_{jl,k}^i - \Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{hk}^i \Gamma_{jl}^h - \Gamma_{hl}^i \Gamma_{jk}^h. \tag{3.4.4}$$

(3.4.3)式说明在 Riemann 流形上向量的二次协变导数是不可交换的.

对于任意的张量场,也有类似于(3.4.3)式的关系.另外,(R_{jkl}^i)确实是一张量,这一点只要证明其在坐标转换时满足张量的变换规则即可.

Riemann 曲率张量(R_{jkl}^i)是描述流形上高阶绝对微商不可交换性的量.当 $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$,即联络为欧氏联络时,亦即 Riemann 流形是欧氏空间时,$R_{jkl}^i \equiv 0$.同时,我们可以证明 $R_{jkl}^i \equiv 0$ 也是 Riemann 流形是欧氏空间的充分条件.在第二章的曲面论中,Gauss 曲率就是二维 Riemann 流形的 Riemann 曲率张量(后面可以看出二维流形上 Riemann 曲率张量只有一个非零分量,我们将其称为 Riemann 曲率).当 Gauss 曲率为零时,曲面是可展曲面.可展曲面和平面是度量等价的,即它们可以看成同样的二维 Riemann 流形.

二、曲率张量的性质

在 Riemann 流形上,张量的协变分量和逆变分量是可转换的.这时我们引入曲率张量(R_{jkl}^i)的协变分量为

$$R_{ijkl} = R_{jkl}^h g_{ih}$$

$$= \frac{1}{2}(g_{ik,jl} - g_{il,jk} - g_{jk,il} + g_{jl,ik}) + \Gamma_{h,ik}\Gamma_{jl}^h - \Gamma_{h,il}\Gamma_{jk}^h.$$

(3.4.5)

曲率张量的各分量之间有下列关系：

$$R^i_{jkl}+R^i_{jlk}=0,\quad \text{（反对称性）}\tag{3.4.6}$$

$$R^i_{jkl}+R^i_{ljk}+R^i_{klj}=0,\quad \text{（Bianchi 第一恒等式）}\tag{3.4.7}$$

$$R_{ijkl}=-R_{ijlk}=-R_{jikl}=R_{klij},\tag{3.4.8}$$

$$R_{ijkl}+R_{iljk}+R_{iklj}=0,\tag{3.4.9}$$

$$\nabla_h R^i_{jkl}+\nabla_k R^i_{jlh}+\nabla_l R^i_{jhk}=0,\quad \text{（Bianchi 第二恒等式）}\tag{3.4.10}$$

$$\nabla_h R_{ijkl}+\nabla_k R_{ijlh}+\nabla_l R_{ijhk}=0.\tag{3.4.11}$$

上述各条性质均可直接验证.

有了上面(3.4.6)～(3.4.9)四个代数关系，(R_{ijkl})不再是 n^4 个独立的分量组成的了. 首先，由于 $R_{ijkl}=-R_{jikl}$，可知 i,j 反对称，i,j 一共有 $n_1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个独立的组合；同理，kl 也是有 n_1 个独立的组合. 其次，由于 $R_{ijkl}=R_{klij}$，因此(ij)与(kl)是对称的，即这时一共应有 $n_2=\dfrac{n_1(n_1+1)}{2}$ 种独立的组合关系. 最后，由(3.4.9)式，当 i,j,k,l 中有两个是相同的量时，则(3.4.9)式退化为(3.4.8)式，因此(3.4.9)式一共有 $n_3=C_n^4$ 个独立方程. 因而由上面三点，(R_{ijkl}) 独立分量的个数为

$$m=n_2-n_3=\frac{1}{12}n^2(n^2-1).\tag{3.4.12}$$

例如，对于 $n=2$，有 $m=1$，即曲面的 Gauss 曲率；当 $n=3$ 时，$m=6$.

现在就可以回答本节一开始所提出的问题了. 答案是：当 R^i_{jkl} 满足上面(3.4.6)～(3.4.11)式时，由(3.4.4)式积分求得的 Γ^i_{jk} 就与 g_{ij} 是协调的.

上面关于 Riemann 曲率张量的讨论均是在 Riemann 流形或伪 Riemann流形上进行的，对于只给定一般联络系数 Γ^k_{ij}（关于 i,j 不一定对称）的流形，这些式子并不一定成立.

三、曲率张量的缩并

对 Riemann 曲率张量(R^i_{jkl})，对其任意两个指标进行缩并

可得：

$$(R^i_{kil}),\quad (R^i_{kli}),\quad (R^i_{klj}g^{kl}),\quad (R^i_{kjl}g^{kl}).$$

由于 R^i_{jkl} 对 (i,j) 及 (k,l) 的反对称性，其他缩并方式均得零. 上面四个缩并的二阶张量若不计正负符号可证明实际上是同一张量. 通常用

$$(R_{ij}) = (R^k_{ikj}) \tag{3.4.13}$$

来表示这个二阶张量，称为 **Ricci 张量**. 对上式的指标再进行一次缩并得到 Riemann 流形的曲率：

$$R = R_{ij}g^{ij}. \tag{3.4.14}$$

由(3.4.4)式，可得

$$R_{ij} = R^k_{ikj} = (\Gamma^k_{ik})_{,j} - (\Gamma^k_{ij})_{,k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{lj} - \Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl}. \tag{3.4.15}$$

上式第一项可利用第二章的公式 $\Gamma^k_{ik} = (\sqrt{g})_{,i}$ 来计算，因此一般有

$$R_{ij} = (\sqrt{g})_{,ij} - (\Gamma^k_{ij})_{,k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{lj} - \Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl}. \tag{3.4.16}$$

由此可看出 Ricci 曲率张量 (R_{ij}) 是一个对称张量.

利用 Bianchi 第二恒等式可以进一步讨论曲率张量的性质. 对(3.4.10)式中的 i,k 两个指标进行缩并，得

$$\nabla_h R_{jl} + \nabla_i R^i_{jlh} + \nabla_l R^i_{jhi} = 0.$$

由于有 $R^i_{jhi} = -R^i_{jih} = -R_{jh}$，所以上式变为

$$\nabla_h R_{jl} - \nabla_l R_{jh} + \nabla_i R^i_{jlh} = 0.$$

再利用曲率张量的对称性：

$$R^i_{jlh} = g^{ik}R_{kjlh} = -g^{ik}R_{jklh} = -g^{ik}g_{js}R^s_{klh},$$

上式变成如下形式：

$$\nabla_h R_{jl} - \nabla_l R_{jh} - g^{ik}g_{js}\nabla_i R^s_{klh} = 0, \tag{3.4.17}$$

其中利用了度量张量的绝对微商为零的条件. (3.4.17)式再对 j,l 两个指标进行缩并，有

$$\nabla_h R - g^{jl}\nabla_l R_{jh} - g^{ik}\nabla_i R_{kh} = 0.$$

记 $R^i_j = R_{kj}g^{ik}$，$R^{ij} = R^i_k g^{kj}$，上式变为

$$\nabla_h R - 2\nabla_i R^i_h = 0,$$

进一步有

$$\nabla_i\left(R^{ij}-\frac{1}{2}Rg^{ij}\right)=0. \tag{3.4.18}$$

(3.4.18)式称为**缩并的 Bianchi 第二恒等式**. 广义相对论中,物质场的能量动量张量 T_{ij} 满足守恒定律:

$$g^{ij}\nabla_j T_{ik}=0. \tag{3.4.19}$$

比较两式,可知度量张量应满足

$$R_{ij}-\frac{1}{2}Rg_{ij}=-8\pi GT_{ij}-\lambda g_{ij}, \tag{3.4.20}$$

其中 G 是引力常数,λ 是宇宙常数. (3.4.20)式就是广义相对论的引力场方程.

在通常的二维及三维 Riemann 流形上,曲率张量有比较简单的形式. 先来看二维 Riemann 流形的情形. 在二维流形上,只有 R_{1212} 不为零,由(3.4.5)式有

$$R_{1212}=\frac{1}{2}(g_{11,22}+g_{22,11}-2g_{12,12})+g_{hs}(\Gamma^s_{11}\Gamma^h_{22}-\Gamma^s_{12}\Gamma^h_{12}).$$

比较此式与曲面论中的 Gauss 方程(2.4.19),可得

$$R_{1212}=-\kappa g, \tag{3.4.21}$$

而 R^i_{jkl} 的缩并为

$$R_{11}=-g^{22}\kappa g,\quad R_{12}=g^{21}\kappa g,\quad R_{22}=-g^{11}\kappa g; \tag{3.4.22}$$

$$R=R_{ij}g^{ij}=-2\kappa. \tag{3.4.23}$$

即 Gauss 曲率与这里定义的 Riemann 曲率是一致的. 对于 Riemann 流形. 由(3.4.12)式知,R^i_{jkl} 由 $m=6$ 个独立的分量来确定. 同样,R_{ij} 也有 6 个独立的常数. 可以证明,Riemann 曲率张量完全由其 Ricci 张量确定:

$$R_{ijkl}=R_{ik}g_{jl}-R_{il}g_{jk}+R_{jl}g_{ik}-R_{jk}g_{il}+\frac{R}{2}(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl}). \tag{3.4.24}$$

要证明此式并不难,请大家自行完成.

§3.5 Riemann 流形与力学系统

Riemann 流形在物理学和力学中的应用很广泛，这里我们对有限自由度系统的运动方程及变形体的协调方程从 Riemann 流形的角度作一些简单的讨论.

一、有限自由度系统的运动方程

在分析力学中，含有 n 个自由度的系统的状态可以由 n 个参量$(q^1,\cdots,q^n)$来描述. 这组参数的一个值$(q^1,\cdots,q^n)$称为一个点，所有这些点的集合在通常拓扑结构下构成一个 n 维流形，而 $\boldsymbol{q}=(q^1,\cdots,q^n)$就是该流形的一组局部坐标. 在流形的切空间 $\mathscr{T}_q(\mathscr{M})$中，任一向量为$(\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n)$，其动能为

$$T=\frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j. \tag{3.5.1}$$

而对应于广义位移 $\boldsymbol{q}$，广义力 $\boldsymbol{Q}$ 可以看做流形上的余切向量，在局部坐标中记$\boldsymbol{Q}=(Q_1,\cdots,Q_n)$. 当系统是完整约束的保守系统时，$g_{ij}=g_{ij}(\boldsymbol{q})$，从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^i}=Q_i. \tag{3.5.2}$$

用 Christoffel 符号表示上述方程得

$$\ddot{q}^i+\Gamma^i_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k=g^{ij}Q_j, \tag{3.5.3}$$

而 Γ^k_{ij} 是对应于 g_{ij} 的联络系数. 上式就是在完整约束的保守系统中的运动方程.

二、变形张量的协调方程

在欧氏空间中，由于存在整体的坐标变换 $\tilde{x}^{i'}=\tilde{x}^{i'}(x^1,\cdots,x^n)$，使得空间的度量系数满足：

$$\tilde{g}_{i'j'}=\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^{i'}}\frac{\partial x^l}{\partial\tilde{x}^{j'}}g_{kl}=\delta_{i'j'}, \tag{3.5.4}$$

因此对应于任意坐标$\{x^i\}$下的曲率张量(R^i_{jkl})有下列性质：

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{p'}} \frac{\partial \tilde{x}^{q'}}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^{r'}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^{s'}}{\partial x^l} \tilde{R}^{p'}_{q'r's'} = 0, \qquad (3.5.5)$$

即欧氏空间在任意坐标系中曲率张量的分量为零，亦即欧氏空间的曲率张量的分量为零. 反过来也是这样的. 因此对于一个 Riemann 流形，它是欧氏空间的充分必要条件是其曲率张量的分量为零.

由这一性质我们可以来讨论变形张量的协调条件. 由于变形体 $\mathscr{D}$ 在变形前是处于一个三维欧氏空间的，设其度量系数为 g_{ij}，则相应的 Riemann 曲率张量的分量为

$$R^i_{jkl} = 0.$$

写成协变张量的分量形式，则有

$$\frac{1}{2}(g_{ik,jl} + g_{jl,ik} - g_{il,jk} - g_{jk,il}) + \Gamma_{h,ik}\Gamma^h_{jl} - \Gamma_{h,il}\Gamma^h_{jk} = 0. \qquad (3.5.6)$$

在变形后，对应于 $\mathscr{D}$ 中每一点有一位移函数 $\boldsymbol{u}$，于是空间的度量系数变为

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + 2\varepsilon_{ij}, \qquad (3.5.7)$$

其中

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{r}_j \cdot \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j) \qquad (3.5.8)$$

是 Green 应变张量的分量在局部坐标中的表示. 在弹性理论中假设空间在变形后仍然是欧氏空间，因此，$\tilde{g}_{ij}$ 也同样满足曲率张量为零的条件，即

$$\tilde{R}^i_{jkl} = 0,$$

具体写出来就是：

$$\frac{1}{2}(\tilde{g}_{ik,jl} + \tilde{g}_{jl,ik} - \tilde{g}_{il,jk} - \tilde{g}_{jk,il}) + \tilde{\Gamma}_{h,ik}\tilde{\Gamma}^h_{jl} - \tilde{\Gamma}_{h,il}\tilde{\Gamma}^h_{jk} = 0. \qquad (3.5.9)$$

将(3.5.9)式中 $\tilde{\Gamma}^j_{ik}$ 等计算出来，减去(3.5.6)式，并且略去 ε_{ij} 的二

次以上的量，就得到了应变张量的协调方程. 具体计算如下：

$$\widetilde{\Gamma}_{k,ij}=\frac{1}{2}(\widetilde{g}_{ik,j}+\widetilde{g}_{jk,i}-\widetilde{g}_{ij,k})=\Gamma_{k,ij}+\varepsilon_{ik,j}+\varepsilon_{jk,i}-\varepsilon_{ij,k}$$

$$=\Gamma_{k,ij}+\nabla_j\varepsilon_{ik}+\nabla_i\varepsilon_{jk}-\nabla_k\varepsilon_{ij}+2\Gamma^l_{ij}\varepsilon_{lk},\qquad(3.5.10)$$

而

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij}=\widetilde{\Gamma}_{l,ij}\widetilde{g}^{kl}=\widetilde{\Gamma}_{l,ij}(g^{kl}-2g^{kr}g^{ls}\varepsilon_{rs})$$

$$\approx\Gamma^k_{ij}+g^{kl}(\nabla_j\varepsilon_{il}+\nabla_i\varepsilon_{jl}-\nabla_l\varepsilon_{ij}+2\Gamma^h_{ij}\varepsilon_{hl})-2\Gamma^s_{ij}\varepsilon_{rs}g^{kr}$$

$$=\Gamma^k_{ij}+g^{kl}(\nabla_j\varepsilon_{il}+\nabla_i\varepsilon_{jl}-\nabla_l\varepsilon_{ij}),\qquad(3.5.11)$$

因而协调方程为

$$\varepsilon_{ik,jl}+\varepsilon_{lj,ik}-\varepsilon_{il,jk}-\varepsilon_{jk,il}+\Gamma^h_{jl}(\nabla_k\varepsilon_{ih}+\nabla_i\varepsilon_{kh}-\nabla_h\varepsilon_{ik}+2\Gamma^s_{ik}\varepsilon_{hs})$$
$$+\Gamma^h_{ik}(\nabla_j\varepsilon_{lh}+\nabla_l\varepsilon_{jh}-\nabla_h\varepsilon_{jl})-\Gamma^h_{jk}(\nabla_l\varepsilon_{ih}+\nabla_i\varepsilon_{lh}-\nabla_h\varepsilon_{il}+2\Gamma^s_{il}\varepsilon_{hs})$$
$$-\Gamma^h_{il}(\nabla_j\varepsilon_{kh}+\nabla_k\varepsilon_{jh}-\nabla_h\varepsilon_{jk})=0,$$
$$(3.5.12)$$

整理得到

$$\nabla_j\nabla_l\varepsilon_{ik}+\nabla_i\nabla_k\varepsilon_{jl}-\nabla_j\nabla_k\varepsilon_{il}-\nabla_i\nabla_l\varepsilon_{jk}=0.\qquad(3.5.13)$$

这就是变形张量的协调方程.

习　题　三

1. 试说明三维欧氏空间中的单位球面 $\mathscr{S}^2$ 是流形，并解释单位圆 $\mathscr{S}^1$ 是 $\mathscr{S}^2$ 的子流形.

2. 试说明刚体在空间中的位置构成一个六维流形，而且三维欧氏空间是它的子流形.

3. 试说明 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ 是一流形，而正交变换群 $\mathscr{O}(n,\mathbb{R})$ 是它的子流形. 对 $n=3$ 时给出具体的讨论并写出它的切空间和纤维丛.

4. 对于二维流形，若 $g_{12}=0$，证明：

$$R_{11}g_{22}=R_{22}g_{11}=R_{1221},\quad R_{12}=0,\quad R=g^{ij}R_{ij}=\frac{2R_{1221}}{g_{11}g_{22}}.$$

5. 已知 (g_{ij}) 正定，任意给定两个向量 $\boldsymbol{u}=(u^i)$，$\boldsymbol{v}=(v^i)$，求证

它们夹角的正弦为

$$\sin^2\theta = \frac{(g_{ij}g_{kl} - g_{il}g_{jk})u^i u^j v^k v^l}{g_{ij}g_{kl}u^i u^j v^k v^l}.$$

6. 令 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ 为测地线组成的三角形的顶点，$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 为相应的三个内角，试证若在点 $\boldsymbol{p}_1$ 切于测地线的一个向量沿三角形边缘平移，则回到点 $\boldsymbol{p}_1$ 时，该向量相对于初始方向转动了 $\pi - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$ 角度.

7. 试推导三维空间中一块平面产生保持度量不变的变形时，第一标形的改变量所应满足的方程.

8. 证明：$\nabla_l R^l_m = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial R}{\partial x^m}$.

第四章　外微分与 Stokes 定理

§4.1　外　微　分

一、微分形式

第一章中我们引进了外形式的概念. 线性空间 $\mathscr{L}^n$ 上的 r 次外形式定义为 $\mathscr{L}^n$ 上的 r 阶反称协变张量. 同样，我们知道，n 维流形 $\mathscr{M}$ 上点 $\boldsymbol{p}$ 的切空间 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 是一个 n 维向量空间，因此，流形 $\mathscr{M}$ 上点 $\boldsymbol{p}$ 的 r 次外形式也就是定义在 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 上的 r 阶反称协变张量，而流形 $\mathscr{M}$ 上的 r 阶反称协变张量场则称为流形上的 r **次微分形式**.

零次微分形式就是流形上的光滑函数. 而一次微分形式则是流形上的余切向量场. 在流形 $\mathscr{M}$ 的局部坐标 $\boldsymbol{x}=\{x^i\}$ 中，取自然基底$\{\mathrm{d}x^i\}$为余切空间的基底，则任意的一次微分形式

$$\boldsymbol{\omega}:\ \mathscr{T}(\mathscr{M})\to\mathbb{R} \tag{4.1.1}$$

在局部坐标中表示为

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_i\mathrm{d}x^i\in\mathscr{T}^*(\mathscr{M}). \tag{4.1.2}$$

对于 r 次微分形式，类似于 r 次外形式，可以取自然基底：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}&=\sum_{\sigma\in S_r}\operatorname{sgn}(\sigma)\mathrm{d}x^{i_{\sigma_1}}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_{\sigma_r}}\\&=\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_r}.\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

在此基底下，任意的 r 次微分形式

$$\boldsymbol{\omega}_r:\ \underbrace{\mathscr{T}(\mathscr{M})\otimes\mathscr{T}(\mathscr{M})\otimes\cdots\otimes\mathscr{T}(\mathscr{M})}_{r\text{个}}\to\mathbb{R} \tag{4.1.4}$$

可以表示为

$$\boldsymbol{\omega}_r = \frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r} = \sum_{i_1<\cdots<i_r}\omega_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}. \tag{4.1.5}$$

流形 $\mathscr{M}$ 上的全体 r 次微分形式的集合记为 $\Lambda^r(\mathscr{M})$. 在 $\Lambda^r(\mathscr{M})$ 中,所有元素(即微分形式)之间可以定义加法和外积运算. 这些性质与第一章中所讨论的关于外形式的性质是完全一致的. 同时,我们知道在 n 维流形上,微分形式的次数最大为 n.

同样,n 维流形上的各次微分形式的直和

$$\Lambda^* = \Lambda^0 \oplus \Lambda^1 \oplus\cdots\oplus \Lambda^n \tag{4.1.6}$$

所组成的线性空间是 2^n 维的. 这个线性空间对外积运算和加法运算构成外代数.

二、外微分

第三章中,我们曾在微分流形上讨论过张量场的绝对微分运算. 我们说过,张量场的绝对微分运算是依赖于流形上的联络结构,即流形上的第二类 Christoffel 符号的. 而张量场的绝对微分也就表明了张量场在流形上的变化. 这里我们要讨论作用在微分形式上的一种微分算子——外微分.

外微分算子是从微分形式的空间 Λ^r 到 Λ^{r+1} 的一个映射,是一个线性的算子,同时,对外积运算满足 Leibniz 法则,即它是一个微分算子. 下面我们从零次微分形式谈起.

对于零次微分形式即流形上的光滑函数 f,定义它的外微分为函数的全微分:

$$\mathrm{d}f = f_i\mathrm{d}x^i. \tag{4.1.7}$$

这样定义的零次微分形式的外微分是一次微分形式,即流形的余切向量场.

对于流形上给定的 r 次微分形式

$$\boldsymbol{\omega}_r = \frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}, \tag{4.1.8}$$

定义其外微分为

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_r &= \frac{1}{r!}\mathrm{d}\omega_{i_1\cdots i_r}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r} \\
&= \frac{1}{r!}\omega_{i_1\cdots i_r,k}\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r} \\
&= \frac{1}{(r+1)!}\left(\frac{1}{r!}\delta^{ki_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{r+1}}\omega_{i_1\cdots i_r,k}\right)\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_{r+1}}.
\end{aligned}\tag{4.1.9}$$

由上式我们看出，$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_r$ 是 $r+1$ 次微分形式.

由上面关于外微分的定义可以看出，微分形式的外微分是通常多元函数全微分的自然推广. 第三章我们讨论流形上的切向量场的性质时，必须要引进联络系数这个附加的结构来进行，而对于微分形式，外微分运算是流形自身的一种微分运算，因而微分形式在流形的分析中占有重要的位置.

有了上面的定义，我们下面来看一下外微分运算的基本性质.

性质 1 外微分运算是线性的，即

$$\mathrm{d}(\alpha\boldsymbol{\varphi}+\beta\boldsymbol{\psi}) = \alpha\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}+\beta\mathrm{d}\boldsymbol{\psi} \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R}\,,\ \boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\in\Lambda^*). \tag{4.1.10}$$

性质 2 外微分运算是斜微分算子，即

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega}_p\wedge\boldsymbol{\omega}_q) = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_p\wedge\boldsymbol{\omega}_q+(-1)^p\boldsymbol{\omega}_p\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_q \quad (\boldsymbol{\omega}_p\in\Lambda^p,\boldsymbol{\omega}_q\in\Lambda^q). \tag{4.1.11}$$

性质 3 零次微分形式的外微分就是全微分：

$$\mathrm{d}f = f_{,i}\mathrm{d}x^i. \tag{4.1.12}$$

性质 4 对于零次微分形式 f，有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathbf{0}. \tag{4.1.13}$$

以上四条性质是容易证明的. 如性质 2，设

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{1}{p!}\omega_{i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}, \quad \boldsymbol{\omega}_q = \frac{1}{q!}\varphi_{i_1\cdots i_q}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_q},$$

则

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{\omega}_p\wedge\boldsymbol{\omega}_q) = \frac{1}{p!}\frac{1}{q!}\frac{\partial(\omega_{i_1\cdots i_p}\varphi_{j_1\cdots j_q})}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k$$

$$\wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_q}$$

$$= \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} (\omega_{i_1 \cdots i_p, k} \varphi_{j_1 \cdots j_q} + \omega_{i_1 \cdots i_p} \varphi_{j_1 \cdots j_q, k}) \mathrm{d}x^k$$

$$\wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_q}$$

$$= \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_p \wedge \boldsymbol{\omega}_q + (-1)^p \boldsymbol{\omega}_p \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_q.$$

另外，上面的四条性质也可以作为外微分运算的定义. 也就是说，若定义了某种从空间 Λ^r 到 Λ^{r+1} 的一个映射，满足如上的四条性质，则它一定是我们这里的外微分算子.

对于任意的微分形式 $\boldsymbol{\omega}$，一般地，我们有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{0}. \tag{4.1.14}$$

这个结论称为 **Poincaré 引理**. 为了证明它，只要对 $\boldsymbol{\omega}$ 是一个单项式时进行讨论（因为 d 是线性算子）. 设 $\boldsymbol{\omega}$ 为 r 次单项式：

$$\boldsymbol{\omega} = f \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}, \tag{4.1.15}$$

则有

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{d}(f_k \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r})$$

$$= f_{kj} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_r}. \tag{4.1.16}$$

由于上式中，$k=j$ 时的项自然为零（$\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^j = \boldsymbol{0}$），而 $k \neq j$ 时，$\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^j$ 与 $\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$ 成对出现，并且是反号的（这里用到了 $f_{kj} = f_{jk}$），因此上式恒为零，故有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{0}$，得证.

三、若干例子

为了说明外微分及微分形式的广泛应用，我们来看如下几个例子.

例 1　在三维正交曲线坐标中，$\boldsymbol{e}_i = H_i \mathrm{d}x^i$（这里不对 i 求和，H_i 是 Lamé 系数），一次微分形式

$$\boldsymbol{\omega}_1 = a_1 \boldsymbol{e}_1 + a_2 \boldsymbol{e}_2 + a_3 \boldsymbol{e}_3 = a_i H_i \mathrm{d}x^i \quad (\text{对 } i \text{ 求和}) \tag{4.1.17}$$

代表了三维欧氏空间中的向量场，则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1 = [(a_3 H_3)_2 - (a_2 H_2)_3] \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + [(a_1 H_1)_3$$

$$
\begin{aligned}
&-(a_3H_3)_1]\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1+[(a_2H_2)_1-(a_1H_1)_2]\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\\
&=\frac{(a_3H_3)_2-(a_2H_2)_3}{H_2H_3}\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3+\frac{(a_1H_1)_3-(a_3H_3)_1}{H_1H_3}\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2\\
&+\frac{(a_2H_2)_1-(a_1H_1)_2}{H_1H_2}\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}
\tag{4.1.18}
$$

这相当于给出了向量函数 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 的旋度：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{curl}\,\boldsymbol{a}&=\left(\frac{(a_3H_3)_2-(a_2H_2)_3}{H_2H_3},\frac{(a_1H_1)_3-(a_3H_3)_1}{H_1H_3},\frac{(a_2H_2)_1-(a_1H_1)_2}{H_1H_2}\right)\\
&=\frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix}H_1\boldsymbol{e}_1 & H_2\boldsymbol{e}_2 & H_3\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3}\\ a_1H_1 & a_2H_2 & a_3H_3\end{vmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4.1.19}
$$

例 2 给定二次微分形式：

$$
\boldsymbol{\omega}_2=a_1H_2H_3\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3+a_2H_3H_1\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1+a_3H_1H_2\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2,
\tag{4.1.20}
$$

它也代表欧氏空间的一个向量场，其外微分为

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial x^1}+\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial x^2}+\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial x^3}\right]\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3.
\tag{4.1.21}
$$

这相当于给出了向量函数 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 的散度：

$$
\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial x^1}+\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial x^2}+\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial x^3}\right].
\tag{4.1.22}
$$

例 3 在电动力学中，当取无量纲数 $c=\mu_0=\varepsilon_0=1$ 时，Maxwell 方程组可写为

$$
\begin{cases}
\mathrm{curl}\boldsymbol{H}-\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=4\pi\boldsymbol{J},\\
\mathrm{curl}\boldsymbol{E}-\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=\boldsymbol{0},\\
\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0,\\
\mathrm{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho.
\end{cases}
\tag{4.1.23}
$$

其中 $\boldsymbol{E}=(E_1,E_2,E_3)$ 和 $\boldsymbol{H}=(H^1,H^2,H^3)$ 分别代表电场和磁场，$\boldsymbol{J}$ 是电流密度，ρ 是电荷分布. 若给定一个二次微分形式

$$\boldsymbol{\omega}_2=\sum_{\alpha=1}^{3}E_\alpha\mathrm{d}x^0\wedge\mathrm{d}x^\alpha+H^1\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3+H^2\mathrm{d}x^3\wedge\mathrm{d}x^1+H^3\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2,\qquad(4.1.24)$$

这里记 $x^0=t$，则 $\boldsymbol{\omega}_2$ 的外微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2=\mathbf{0}\qquad(4.1.25)$$

给出(4.1.23)式的中间两个方程. 若在 (x^0,x^1,x^2,x^3) 确定的四维空间中给定

$$(g_{ij})=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1),$$

则

$$*(\mathrm{d}(*\boldsymbol{\omega}_2))=4\pi(\rho\mathrm{d}x^0+J_i\mathrm{d}x^i)\qquad(4.1.26)$$

给出了(4.1.23)式的另外两个方程.

(4.1.25)，(4.1.26)两式就是用微分形式表示的电磁学 Maxwell 方程组.

§4.2 Stokes 定理

一、流形上的积分

把流形上局部性质与整体性质联系起来的方法是定义流形上外微分形式的积分. 要定义积分则要事先准备一些预备的概念.

首要的问题是光滑函数的定向. 在曲面论中我们知道，一般有单侧曲面与双侧曲面两类. 通常三维空间中我们所遇到的球面、锥面、柱面等都是双侧球面. 在这类曲面的每一个点上有两个法线方向：内法线和外法线. 这类曲面称为**定向曲面**. 但是，对于 Möbius 带这样的曲面，

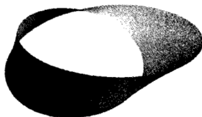


图 4.1

我们不能区分它的两个侧面(见图 4.1),因为在它的任一点 p 上取一法向,将此法向沿曲面转一圈以后再回到点 p 时法向反了方向. 这类曲面就称为**不可定向曲面**.

将曲面的定向这个思想推广到高维光滑流形上,就可以得到流形的定向的定义. 我们知道,在曲面上,法向量可以由曲面的切向来定义,即法向是与两个切向的外积联系在一起的. 类似地,在 n 维光滑流形上,n 次外形式 ω 就相应于曲面的法向,因此我们有如下的定义:

定义 4.1 如果 n 维光滑流形 $\mathscr{M}$ 上存在一个处处非零的连续的 n 次微分形式 $\boldsymbol{\omega}$,则称 $\mathscr{M}$ 是**可定向的流形**,而 $\boldsymbol{\omega}$ 称为流形 $\mathscr{M}$ 的一个**定向**.

如果 $\boldsymbol{\omega}$ 与 $\boldsymbol{\omega}'$ 是流形 $\mathscr{M}$ 的两个定向微分形式,则一定存在流形 $\mathscr{M}$ 上的连续函数 f,使得

$$\boldsymbol{\omega}' = f\boldsymbol{\omega}, \tag{4.2.1}$$

其中 f 处处不为零. 若 $\mathscr{M}$ 是连通的流形,则 f 在 $\mathscr{M}$ 上还必然是定号的,因此连通可定向流形必然有两个定向.

对于 n 维可定向流形 $\mathscr{M}$,设 $\boldsymbol{\omega}$ 是其定向微分形式,在 $\mathscr{M}$ 的局部坐标卡$(\mathscr{U},u^i)$中,$\mathrm{d}u^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}u^n$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 在 $\mathscr{U}$ 内相差一个处处不为零的因子. 若该因子是正的,则称坐标卡$(\mathscr{U},u^i)$是**与定向 $\boldsymbol{\omega}$ 相符的坐标覆盖**. 这时对于任意相交的区域,坐标变换的 Jacobi 行列式处处为正. 反过来,流形上具有这种性质的坐标卡集时,流形也就是定向流形. 这一点由下面关于覆盖的单位配分可以看出.

要在流形上定义积分,有了上面流形定向的定义以后,接下来要考虑的是积分测度的定义. 在 n 维流形 $\mathscr{M}$ 中,全体 n 次微分形式 Λ^n 的自然基底在局部坐标卡$(\mathscr{U},x^i)$中表示为

$$\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{4.2.2}$$

在坐标变换$\{x^i\} \longmapsto \{y^i\}$下,有

$$\mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n = \frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{4.2.3}$$

上式相当于 n 重积分的坐标变换. 因此在 n 维流形上，我们就选择(4.2.2)式作为 n 维的**有向体积元**：

$$\tau(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{4.2.4}$$

对于流形 $\mathscr{M}$ 上的某坐标卡$(\mathscr{U}, x^i)$，设 $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ 是 n 维闭子流形，$f(\boldsymbol{x}) \in \mathscr{F}(\mathscr{U})$是光滑函数，定义 f **在** $\mathscr{V}$**上的积分**为

$$\int_{\mathscr{V}} f(\boldsymbol{x}) \tau(\boldsymbol{x}) = \int_{\varphi(\mathscr{V})} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n, \tag{4.2.5}$$

上式的右端是 $f(\boldsymbol{x})$的通常 n 维积分，其中 φ 是关于坐标卡$(\mathscr{U}, x^i)$的映射. 由定积分的性质，上述定义与坐标的选择是无关的.

当进行积分的区域 $\mathscr{V}$被若干个开集 $\mathscr{U}_\alpha$ 覆盖时，需要引进开覆盖的单位配分的概念.

设流形 $\mathscr{M}$ 的坐标卡集为$\{(\mathscr{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$，当 $\mathscr{M}$ 是具有可数拓扑基的 Hausdorff 空间时，存在一组流形上的光滑函数$\{\rho_\alpha(\boldsymbol{x})\}$，满足：

(1) $0 \leqslant \rho_\alpha(\boldsymbol{x}) \leqslant 1$；

(2) 当 $\boldsymbol{x} \notin \mathscr{U}_\alpha$ 时，$\rho_\alpha(\boldsymbol{x}) = 0$；

(3) $\sum\limits_\alpha \rho_\alpha(\boldsymbol{x}) \equiv 1$.

这族$\{\rho_\alpha(\boldsymbol{x})\}$称为开覆盖$\{\mathscr{U}_\alpha\}$的**单位配分**. $\mathscr{M}$ 具有可数拓扑基保证了对于 $\forall\, \boldsymbol{p} \in \mathscr{M}$，$\exists\, \mathscr{U} \subset \mathscr{M}$ 是 $\boldsymbol{p}$ 的开邻域，使得$\{\mathscr{U} \cap \mathscr{U}_\alpha\}$中只有有限个集合非空，即 $\sum\limits_\alpha \rho_\alpha(\boldsymbol{x})$ 中求和在每一点只有有限个项相加，因而是有意义的.

有了单位配分以后，对于流形 $\mathscr{M}$ 上的任意光滑函数 f，f **在** $\mathscr{M}$ **上的积分**定义为

$$\int_{\mathscr{M}} f(\boldsymbol{x}) \tau(\boldsymbol{x}) = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(\mathscr{U}_\alpha)} \rho_\alpha(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}_\alpha) \mathrm{d}x_\alpha^1 \mathrm{d}x_\alpha^2 \cdots \mathrm{d}x_\alpha^n. \tag{4.2.6}$$

容易证明，对于不同的单位配分，积分是相同的. 这是因为：若$\{\rho_\alpha(\boldsymbol{x})\}$与$\{\rho'_\beta(\boldsymbol{x})\}$是两种不同的单位配分，则有

$$\sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(\mathscr{U}_\alpha)} \rho_\alpha(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_\alpha^1 \cdots \mathrm{d}x_\alpha^n = \sum_\alpha \int_{\mathscr{M}} \Big(\sum_\beta \rho'_\beta\Big) \rho_\alpha(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}x_\alpha^1 \cdots \mathrm{d}x_\alpha^n$$

$$= \sum_{\beta}\int_{\mathscr{M}}\rho'_{\beta}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\sum_{\alpha}\rho_{\alpha}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{\alpha}^{1}\cdots\mathrm{d}x_{\alpha}^{n}$$

$$= \sum_{\beta}\int_{\varphi_{\beta}(\mathscr{U}_{\beta})}\rho'_{\beta}(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x^{1}\cdots\mathrm{d}x^{n}.$$

上面定义的积分均是对 n 次微分形式讨论的. 若 $\boldsymbol{\omega}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的 r 次微分形式,设

$$\boldsymbol{h}:\ \mathscr{N}\to\mathscr{M} \tag{4.2.7}$$

是 $\mathscr{N}$ 在 $\mathscr{M}$ 中的一个嵌入,即 $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个 r 维嵌入子流形,则 $\boldsymbol{h}^{*}\boldsymbol{\omega}$($\boldsymbol{h}^{*}$ 是映射 $\boldsymbol{h}$ 诱导的拖回映射)是 $\mathscr{N}$ 上的 r 次微分形式,因而积分

$$\int_{\mathscr{N}}\boldsymbol{h}^{*}\boldsymbol{\omega}$$

是有意义的. 我们将 r 次微分形式 ω 在 $\boldsymbol{h}(\mathscr{N})\subset\mathscr{M}$ 上的积分定义为

$$\int_{\boldsymbol{h}(\mathscr{N})}\boldsymbol{\omega}=\int_{\mathscr{N}}\boldsymbol{h}^{*}\boldsymbol{\omega}. \tag{4.2.8}$$

这就是任意次数的微分形式在流形上的积分的一般定义.

二、Stokes 定理

前面我们在流形上引进了微分形式的积分. 从这个积分的定义我们可以看出,流形上的积分实质上是将欧氏空间中的多重积分推广到流形上来. 现在我们来介绍流形上微分形式积分的一个重要性质,它将流形上微分形式的积分与外微分运算联系起来了.

首先引进流形的带边区域的概念. 设 $\mathscr{M}$ 是 n 维光滑流形,所谓 $\mathscr{M}$ 的**带边区域** $\mathscr{D}$ 是指流形 $\mathscr{M}$ 的一个 n 维子集,它的点分为两类:

(1) 内点,即存在该点的一个邻域包含在 D 中;

(2) 边界点,即:若 $\boldsymbol{p}$ 是边界点,则存在点 $\boldsymbol{p}$ 的一个坐标卡 $(\mathscr{U},x^{i})$,使得 $x^{i}(\boldsymbol{p})=0$,并且

$$\mathscr{U}\cap\mathscr{D}=\{\boldsymbol{q}:\ \boldsymbol{q}\in\mathscr{U},x^{n}(\boldsymbol{q})\geqslant 0\}, \tag{4.2.9}$$

也就是说 $\mathscr{U}\cap\mathscr{D}$ 与 $\mathbb{R}^{n}$ 中上半平面同胚.

带边区域 $\mathscr{D}$ 的边界记为 $\partial\mathscr{D}$. 流形的带边区域及其边界有如下性质:

(1) 带边区域的边界是流形的正则嵌入闭子流形. 这一点只要从第三章关于闭子流形和正则嵌入的定义即可看出.

(2) 若流形 $\mathscr{M}$ 是可定向的, 则边界 $\partial\mathscr{D}$ 也是可定向的, 并且 $\partial\mathscr{D}$ 的定向可以由 $\mathscr{M}$ 的定向诱导出来. 为了说明这一点, 设 $\boldsymbol{p}\in\partial\mathscr{D}$, 在点 $\boldsymbol{p}$ 选取与 $\mathscr{M}$ 定向相同的坐标卡 $(\mathscr{U},x^i)$, 则有

$$\mathscr{U}\cap\partial\mathscr{D}=\{\boldsymbol{q}:\boldsymbol{q}\in\mathscr{U},\ x^n(\boldsymbol{q})=0\},\qquad(4.2.10)$$

即 $(x^1,\cdots,x^{n-1})$ 构成了 $\partial\mathscr{D}$ 在点 $\boldsymbol{p}$ 的局部坐标. 在这个坐标系中, $(-1)^n\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n-1}$ 给出了 $\partial\mathscr{D}$ 的定向. 可以证明这样给出的坐标卡上的定向是彼此相容的, 即在 $\partial\mathscr{D}$ 上定向微分形式是不变号不为零的. 设 $(\mathscr{V},y^i)$ 是点 $\boldsymbol{p}$ 与 $\mathscr{M}$ 定向相容的坐标卡, 在 $\mathscr{V}\cap\partial\mathscr{D}$ 上 $y^n=0$, 则在 $\mathscr{D}\cap\mathscr{U}\cap\mathscr{V}$ 上有

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}>0,\qquad(4.2.11)$$

而且在这个区域上 $x^n,y^n\geqslant 0$, 即 x^n 与 y^n 同号. 又由于在点 $\boldsymbol{p}$ 有 $x^n=y^n=0$, 因此 $\dfrac{\partial y^n}{\partial x^n}>0$ (在点 $\boldsymbol{p}$). 在 $\partial\mathscr{D}\cap\mathscr{U}\cap\mathscr{V}$ 上, $y^n=0$, 而 $x^1,\cdots,x^{n-1}$ 不恒为零, 因此有 $\dfrac{\partial y^n}{\partial x^i}=0\ (i=1,\cdots,n-1)$. 由这两个条件, 从(4.2.11)式中即可得出

$$\frac{\partial(y^1,\cdots,y^{n-1})}{\partial(x^1,\cdots,x^{n-1})}>0\qquad(4.2.12)$$

在 $\partial\mathscr{D}\cap\mathscr{U}\cap\mathscr{V}$ 上成立. 这说明 $(-1)^n\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n-1}$ 与 $(-1)^n\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{n-1}$ 在 $\partial\mathscr{D}\cap\mathscr{U}\cap\mathscr{V}$ 上给出的定向是一致的.

有了上面关于带边区域及其边界的性质的一些准备, 我们有如下的 Stokes 定理:

定理 4.1(Stokes[①] 定理) 设 $\mathscr{D}$ 是 n 维定向光滑流形 $\mathscr{M}$ 中的紧致带边区域, $\boldsymbol{\omega}$ 是 $\mathscr{M}$ 上的 $n-1$ 次微分形式, 则有

$$\int_{\mathscr{D}}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\int_{\partial\mathscr{D}}\boldsymbol{\omega}.\qquad(4.2.13)$$

---

① Stokes(1819—1903), 英国数学物理学家.

证明 该定理的证明是数学分析中的几个积分公式（如 Green[1] 公式、Gauss 公式及 Stokes 公式）的证明的一种自然推广.

设$\{(\mathscr{U}_\alpha, x_\alpha^i)\}$是$\mathscr{M}$的一个与定向相容的坐标卡集，$\{g_\alpha\}$是相容的单位配分，则有

$$\int_{\mathscr{D}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \sum_\alpha \int_{\mathscr{D}} \mathrm{d}(g_\alpha \boldsymbol{\omega}), \quad \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{\omega} = \sum_\alpha \int_{\partial\mathscr{D}} g_\alpha \boldsymbol{\omega}.$$

因此只要对每一个α证明

$$\int_{\mathscr{D}} \mathrm{d}(g_\alpha \boldsymbol{\omega}) = \int_{\partial\mathscr{D}} g_\alpha \boldsymbol{\omega}, \tag{4.2.14}$$

就得到我们的结论. 在上式中，$g_\alpha \boldsymbol{\omega}$ 在 $\mathscr{U}_\alpha$ 以外的点上是恒等于零的.

为了方便起见，下面的证明中略去脚标α. 设$n-1$次微分形式$g_\alpha \boldsymbol{\omega}$为

$$g_\alpha \boldsymbol{\omega} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} A_j \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n, \tag{4.2.15}$$

其中$\widehat{\mathrm{d}x^j}$表示该项不存在，则

$$\mathrm{d}(g_\alpha \boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^n A_{j,j} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n. \tag{4.2.16}$$

下面将分两种情形讨论.

(1) 当 $\partial\mathscr{D} \cap \mathscr{U} = \varnothing$时，由于 $g_\alpha \boldsymbol{\omega}$ 在 $\mathscr{U}$ 以外的点上恒为零，因此(4.2.14)式的右端恒为零. 这时 $\mathscr{U}$ 或者在 $\mathscr{M} \backslash \mathscr{D}$ 内，或者包含在 $\mathscr{D}$ 的内部. 对于 $\mathscr{U} \subset \mathscr{M} \backslash \mathscr{D}$，(4.2.14)式的左端自然为零. 若 $\mathscr{U} \subset \mathscr{D} \backslash \partial\mathscr{D}$，有

$$\int_{\mathscr{D}} \mathrm{d}(g_\alpha \boldsymbol{\omega}) = \sum_{j=1}^n \int_{\varphi(\mathscr{U})} A_{j,j} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n, \tag{4.2.17}$$

其中 $\varphi(\mathscr{U}) \subset \mathbb{R}^n$. 由于 A_j 在 $\varphi(\mathscr{U})$的边界上是为零的，因此可以存在$\mathbb{R}^n$中的正方体 $\mathscr{C}$: $|x^i| \leqslant K$ $(i=1,\cdots,n)$，使得 $\varphi(\mathscr{U}) \subset \mathscr{C}$. 将 A_j 延拓到 $\mathscr{C}$ 上连续可微. 因此

---

[1] Green(1793—1841)，英国数学家.

$$\int_{\varphi(\mathscr{U})} A_{j,j}\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n = \int_C A_{j,j}\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$$

$$= \int\limits_{|x^i|\leqslant K, i\neq j} \left(\int_{-K}^{K} A_{j,j}\mathrm{d}x^j\right)\mathrm{d}x^1\cdots\widehat{\mathrm{d}x^j}\cdots\mathrm{d}x^n$$

$$= 0 \quad (\text{对 } j \text{ 不求和}).$$

这样就证明了(4.2.17)式的右端为零,因此这时(4.2.14)式是成立的.

(2) 当 $\partial\mathscr{D}\cap\mathscr{U}\neq\varnothing$ 时,这时无妨设 $\mathscr{U}$ 是与 $\mathscr{M}$ 定向相容的坐标域,即有

$$\begin{cases}\mathscr{U}\cap\mathscr{D} = \{\boldsymbol{q}:\ \boldsymbol{q}\in\mathscr{U}, x^n(\boldsymbol{q})\geqslant 0\},\\ \mathscr{U}\cap\partial\mathscr{D} = \{\boldsymbol{q}:\ \boldsymbol{q}\in\mathscr{U}, x^n(\boldsymbol{q}) = 0\}.\end{cases}$$

同样在坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 中取一个长方体 $\mathscr{C}$: $|x^i|\leqslant K, i=1,\cdots,n-1$, $0\leqslant x^n\leqslant K$,使得 $\varphi(\mathscr{U}\cap\mathscr{D})\subset\mathscr{C}$. 对 A_j 做出与(1)同样的延拓,显然 A_j 在 $\mathscr{C}$ 上连续可微,这时

$$\int_{\partial\mathscr{D}} g_\alpha\boldsymbol{\omega} = \int_{\partial\mathscr{D}\cap\mathscr{U}} g_\alpha\boldsymbol{\omega}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\int_{\partial\mathscr{D}\cap\mathscr{U}} A_j\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

$$= (-1)^{n-1}\int_{\partial\mathscr{D}\cap\mathscr{U}} A_n\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n-1}$$

$$= -\int_{\varphi(\partial\mathscr{D}\cap\mathscr{U})} A_n\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{n-1}$$

$$= -\int\limits_{|x^i|\leqslant K, i\neq n} A_n(x^1,\cdots,x^{n-1},0)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{n-1}, \quad (4.2.18)$$

上式中第三个等号成立是因为在 $\mathscr{U}\cap\partial\mathscr{D}$ 上 $\mathrm{d}x^n=0$,第四个等号成立是考虑到 $\partial\mathscr{D}$ 的诱导定向. 而我们有

$$\int_{\mathscr{D}}\mathrm{d}(g_\alpha\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathscr{D}\cap\mathscr{U}}\mathrm{d}(g_\alpha\boldsymbol{\omega})$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathscr{D}\cap\mathscr{U}} A_{j,j}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathscr{C}} A_{j,j} \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \int_{0 \leqslant x^n \leqslant K,\ |x^i| \leqslant K, i \neq j, n} \left(\int_{-K}^{K} A_{j,j} \mathrm{d}x^j \right) \mathrm{d}x^1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x^j} \cdots \mathrm{d}x^n$$

$$+ \int_{|x^i| \leqslant K, i \neq n} \left(\int_0^K A_{n,n} \mathrm{d}x^n \right) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1}$$

$$= - \int_{|x^i| \leqslant K, i \neq n} A_n(x^1, \cdots x^{n-1}, 0) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1}. \qquad (4.2.19)$$

由(4.2.18)式和(4.2.19)式知(4.2.14)式成立.

由(1)和(2)两种情况,我们就完成了 Stokes 定理的证明. ▌

三、Stokes 定理的若干应用

Stokes 定理的应用是很广的.在数学分析中微积分基本定理、Gauss 公式、Stokes 公式,复变函数中的 Cauchy 定理等均可看做是 Stokes 定理的特例.下面我们来看两个例子.

例 1　若在 $\mathbb{R}^3$ 中取笛卡儿坐标 (x^1, x^2, x^3),令

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_1 = a_1 \mathrm{d}x^1 + a_2 \mathrm{d}x^2 + a_3 \mathrm{d}x^3, \\ \boldsymbol{\omega}_2 = b_1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + b_2 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + b_3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2, \end{cases}$$

并记 $\mathscr{D}_2$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面(有向),$\mathscr{D}_3$ 为空间区域,则 Stokes 定理表现为

$$\int_{\partial \mathscr{D}_2} \boldsymbol{\omega}_1 = \int_{\mathscr{D}_2} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_1$$

$$= \int_{\mathscr{D}_2} \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3} \right) \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1} \right) \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1$$

$$+ \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2.$$

这就是空间中的 **Stokes 公式**.另外,有

$$\int_{\partial \mathscr{D}_3} \boldsymbol{\omega}_2 = \int_{\mathscr{D}_3} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_2 = \int_{\mathscr{D}_3} \left(\frac{\partial b_1}{\partial x^1} + \frac{\partial b_2}{\partial x^2} + \frac{\partial b_3}{\partial x^3} \right) \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3.$$

这是 **Gauss 公式，即散度定理.**

对于非笛卡儿坐标，这些式子仍然是成立的.

例 2　考虑复变函数中的 Cauchy 定理.

设 $f\colon \mathscr{D}\to\mathbb{C}$ 是定义在复平面 $\mathbb{C}$ 中区域 $\mathscr{D}$ 上的解析函数，且在 $\overline{\mathscr{D}}$ 上是连续的，则有

$$\oint_{\partial\mathscr{D}} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

令 $\boldsymbol{\omega}$ 为 $\mathscr{D}$ 上的一次微分形式：

$$\boldsymbol{\omega} = f(z)\mathrm{d}z = (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y),$$

则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\wedge(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\wedge(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)\\ &= \left[-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} &\Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0\\ &\Longleftrightarrow f(z)\ \text{在}\ \mathscr{D}\ \text{上解析}.\end{aligned}$$

由 Stokes 定理有

$$\oint_{\partial\mathscr{D}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\partial\mathscr{D}}\boldsymbol{\omega} = \int_{\mathscr{D}}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0,$$

即 Cauchy 定理成立.

§ 4.3　Poincaré 逆定理

一、闭形与恰当形

首先引进如下定义：

定义 4.2　设 $\mathscr{M}$ 是光滑流形，$\boldsymbol{\omega}\in\Lambda^r(\mathscr{M})$.

(1) 若 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$，则称 $\boldsymbol{\omega}$ 为**闭形式**(简称**闭形**)；

(2) 若 $\exists \boldsymbol{\beta} \in \Lambda^{r-1}(\mathscr{M})$，使 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}$，则称 $\boldsymbol{\omega}$ 为**恰当形式**（简称**恰当形**）.

若上述关系只在光滑流形 $\mathscr{M}$ 的某个子集 $\mathscr{D}$ 上成立，则 $\boldsymbol{\omega}$ 分别称为 $\mathscr{D}$ 上的闭形与恰当形.

从代数的观点来看，外微分算子

$$\mathrm{d}: \Lambda^r \to \Lambda^{r+1} \tag{4.3.1}$$

相当于一个线性映射. 这个映射的核由闭形组成，映射的像由恰当形组成.

由 § 4.1 中引进外微分运算时提到的 Poincaré 引理：任何一个微分形式的两次外微分必为零，即

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}, \tag{4.3.2}$$

知恰当形必然是闭形. 反过来，这个结果是否也成立呢？也就是说，闭形是否一定是恰当形呢？我们的结论是：在局部这个结论是成立的，但在整个流形上却不一定成立. 这就是下面要讲到的 Poincaré 逆定理.

二、Poincaré 逆定理

定理 4.2（Poincaré 逆定理） 设 $\boldsymbol{\omega}$ 是 n 维光滑流形 $\mathscr{M}$ 上的 r 次微分形式，且 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$，则对流形上的任一点 $\boldsymbol{p}$ 及其邻域 $\mathscr{U}$，存在一个 $r-1$ 次微分形式 $\boldsymbol{\beta}$，使得 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}$.

证明 对流形的维数进行数学归纳法.

首先，当 $n=1$ 时，定理的结论是自然成立的，因为一维流形中一次微分形式

$$\boldsymbol{\omega} = a(x)\mathrm{d}x \tag{4.3.3}$$

的外微分为零，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$，而且在 $\forall \boldsymbol{p} \in \mathscr{M}$ 上，若点 $\boldsymbol{p}$ 的坐标为 x_0，其邻域为 $\mathscr{U}$，则一定存在零次微分形式

$$\beta(x) = \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{\omega} = \int_{x_0}^{x} a(y)\mathrm{d}y, \quad \forall x \in \mathscr{U}, \tag{4.3.4}$$

使得

$$d\beta(x) = \boldsymbol{\omega}. \tag{4.3.5}$$

现在设定理对于 $n-1$ 维流形是成立的，我们来证明定理对 n 维流形也成立. 由定理条件，$\boldsymbol{\omega}$ 是流形 $\mathscr{M}$ 上的 r 次微分形式，则一般地，$\boldsymbol{\omega}$ 可以写成为

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + dx^n \wedge \boldsymbol{\omega}_2, \tag{4.3.6}$$

这里 $\boldsymbol{\omega}_1$ 是 $\mathscr{M}$ 上的 r 次微分形式，在局部坐标中不包含 dx^n，$\boldsymbol{\omega}_2$ 则是 $\mathscr{M}$ 上不包含 dx^n 的 $r-1$ 次微分形式. 对 $\forall\, \boldsymbol{p} \in \mathscr{M}$，在其邻域 $\mathscr{U}$ 中，有

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{r!} \sum_{i_s < n, 1 \leqslant s \leqslant r} A^1_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \tag{4.3.7}$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{i_s < n, 1 \leqslant s \leqslant r-1} A^2_{i_1 \cdots i_{r-1}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{r-1}}, \tag{4.3.8}$$

其中系数 $A^1_{i_1 \cdots i_r}$ 和 $A^2_{i_1 \cdots i_{r-1}}$ 均是 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的函数. 引进 $r-1$ 次微分形式：

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{i_s < n, 1 \leqslant s \leqslant r-1} B_{i_1 \cdots i_{r-1}} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{r-1}}, \tag{4.3.9}$$

其中

$$B_{i_1 \cdots i_{r-1}} = \int_{x_0^n}^{x^n} A^2_{i_1 \cdots i_{r-1}} dx^n, \tag{4.3.10}$$

这里点 $\boldsymbol{p}$ 的坐标为 $(x_0^1, \cdots, x_0^n)$，而 $(x^1, \cdots, x^n) \in \mathscr{U}$.

对于 r 次微分形式

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} - d\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\omega}_1 + dx^n \wedge \boldsymbol{\omega}_2 - d\boldsymbol{\alpha}, \tag{4.3.11}$$

由(4.3.9)式和(4.3.10)式可知

$$d\boldsymbol{\alpha} = dx^n \wedge \boldsymbol{\omega}_2 + \frac{1}{(r-1)!} \sum_{i_s < n, 1 \leqslant s \leqslant r} \frac{\partial B_{i_1 \cdots i_{r-1}}}{\partial x^{i_r}} dx^{i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{r-1}}. \tag{4.3.12}$$

将此式代入(4.3.11)式，得

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{r!} \sum_{i_s < n, 1 \leqslant s \leqslant r} \varphi_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \tag{4.3.13}$$

其中

$$\varphi_{i_1\cdots i_r} = A^1_{i_1\cdots i_r} + r(-1)^r \frac{\partial B_{i_1\cdots i_{r-1}}}{\partial x^{i_r}} \qquad (4.3.14)$$

是$(x^1,\cdots,x^n)$的函数.

由(4.3.13)式可知,$\boldsymbol{\varphi}$中不包含有$\mathrm{d}x^n$的项.若$r=n$,则显然$\boldsymbol{\varphi}\equiv\mathbf{0}$(抽屉原则),即$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}$,定理成立.若$r<n$,由定理条件$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$,有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} - \mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}. \qquad (4.3.15)$$

又在点$\boldsymbol{p}$的邻域$\mathscr{U}$中,由(4.3.13)式有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{r!}\sum_{i_s<n,1\leqslant s\leqslant r}\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_{i_1\cdots i_r,j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r}$$

$$+\frac{1}{r!}\sum_{i_s<n,1\leqslant s\leqslant r}\varphi_{i_1\cdots i_r,n}\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_r} = \mathbf{0}. \qquad (4.3.16)$$

由于上式相加的两项中前一项不含$\mathrm{d}x^n$,因而一定有

$$\varphi_{i_1\cdots i_r,n} = 0, \qquad (4.3.17)$$

即$\varphi_{i_1\cdots i_r}$在点$\boldsymbol{p}$邻域$\mathscr{U}$中只是$(x^1,\cdots,x^{n-1})$的函数.这样$\boldsymbol{\varphi}$可看做是一个$n-1$维流形上的r次微分形式(这个$n-1$维流形的一点的邻域与$\mathscr{U}$在$(x^1,\cdots,x^{n-1})$的投影同胚).因此由归纳法假设,存在一个$n-1$维流形上的$r-1$次微分形式$\boldsymbol{\beta}_1$,使得

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathrm{d}\boldsymbol{\beta}_1. \qquad (4.3.18)$$

代入(4.3.11)式,有

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\varphi} = \mathrm{d}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1). \qquad (4.3.19)$$

令$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}_1$,即得定理的结论.

由数学归纳法,我们就证明了 Poincaré 逆定理. ▍

由定理 4.2 的证明可以看出,该定理只能对流形上一点的邻域成立,因为证明过程中用到的积分在邻域中成立.流形上整体成立的条件取决于流形的拓扑性质.下面我们举一个例子来说明这一点.

设流形$\mathscr{M}$为除掉原点以外的平面.在$\mathscr{M}$上定义微分形式:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{-x^2\mathrm{d}x^1 + x^1\mathrm{d}x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2}.$$

易于验算 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$(在 $\mathscr{M}$ 上). 一般地,有

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}\theta,$$

其中 θ 是平面的幅角. 显然在 $\mathscr{M}$ 上 θ 是非单值的,因而 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\theta$ 这个式子只能在局部上取到光滑的单值函数 θ.

三、Poincaré 逆定理在全局成立的充分条件

为了使上述的 Poincaré 逆定理在整个流形上成立,还须对流形或者微分形式添加附带的条件. 我们这里给出下面的几个结论.

定理 4.3 对于定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的开子流形 $\mathscr{D}$ 上的 r 次微分形式 $\boldsymbol{\omega}$,设 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}$ 在 $\mathscr{D}$ 上成立. 若 $\mathscr{D}$ 是星形的,即存在 $\mathscr{D}$ 内一点 $\boldsymbol{p}$,对于任一点 $\boldsymbol{q}$,$\mathbb{R}^n$ 中的直线 $\overline{\boldsymbol{pq}}$ 全部属于 $\mathscr{D}$,则一定存在 $\mathscr{D}$ 上的 $r-1$ 次微分形式 $\boldsymbol{\beta}$,使得 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}$ 在 $\mathscr{D}$ 上成立.

证明 只要取 $\mathscr{D}$ 的第 n 族坐标曲线为 $\overline{\boldsymbol{pq}}$,则 Poincaré 逆定理的证明中的积分均是可以进行的,因而结论成立. ▌

定理 4.4 若 $\mathscr{D}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开子流形,也为单连通区域,则对于定义在 $\mathscr{D}$ 上的一次闭形式 $\boldsymbol{\omega}$,存在零次微分形式 f,使得 $\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}f$.

附带说明,所谓单连通区域是指 $\mathscr{D}$ 内任一曲线可以在 $\mathscr{D}$ 内连续缩为一点.

证明 由于 $\mathscr{D}$ 内的连通性,在 $\mathscr{D}$ 内任取一点 $\boldsymbol{p}$,对于 $\forall\, \boldsymbol{q}\in\mathscr{D}$,存在曲线 $\widehat{\boldsymbol{paq}}$ 全部在 $\mathscr{D}$ 中. 由于 $\boldsymbol{\omega}$ 是一次微分形式,对于 $\widehat{\boldsymbol{paq}}$ ($\mathscr{D}$ 的嵌入子流形),定义函数:

$$f(\boldsymbol{q}) = \int_{\widehat{paq}} \boldsymbol{\omega}. \tag{4.3.20}$$

只需证明 f 的取值与路径 $\widehat{\boldsymbol{paq}}$ 无关,则结论成立. 设 $\widehat{\boldsymbol{pbq}}$ 是 $\boldsymbol{p}$ 到 $\boldsymbol{q}$ 的另一曲线,因此,曲线 $\mathscr{C}$: $\widehat{\boldsymbol{paqbp}}$ 构成了 $\mathscr{D}$ 内的闭曲线,即 $\mathscr{D}$ 的一维正则嵌入闭子流形. 由于 $\mathscr{D}$ 是单连通的,$\mathscr{C}$ 可收缩为 $\mathscr{D}$ 中一点,收缩过程就形成了 $\mathscr{D}$ 中的一个二维定向子流形 $\mathscr{S}$,而 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{S}$ 的边界. 由 Stokes 定理有

$$\int_{\mathscr{C}} \boldsymbol{\omega} = \int_{\mathscr{S}} \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0, \tag{4.3.21}$$

因此有

$$\int_{\widehat{paq}} \boldsymbol{\omega} = \int_{\widehat{pbq}} \boldsymbol{\omega}, \tag{4.3.22}$$

即 $f(q)$与路径无关. 定理得证. ▌

上面两个定理均是 Poincaré 逆定理在全局成立的充分条件，下面讲的 De Rham 定理则是关于闭形式和恰当形式等价性的一个充分必要条件.

先引进 n 维光滑流形上 r 维循环的定义. n 维光滑流形 $\mathscr{M}$ 上的 r 维循环是指 $\mathscr{M}$ 中的 r 维闭子流形(边界为空集).

定理 4.5(De Rham 定理) 设 $\mathscr{D}$ 是光滑流形 $\mathscr{M}$ 的开子流形，$\boldsymbol{\omega}$ 是定义在 $\mathscr{D}$ 上的 r 次闭形式，则在 $\mathscr{D}$ 上 $\boldsymbol{\omega}$ 为恰当形式当且仅当对属于 $\mathscr{D}$ 的任意 r 维循环 $\mathscr{C}_r$ 有

$$\int_{\mathscr{C}_r} \boldsymbol{\omega} = 0. \tag{4.3.23}$$

De Rham 定理的证明要涉及流形的拓扑性质的研究，这里就不给出了.

四、流形上的对偶关系

在 §4.2 中我们讨论了流形上的积分. 通常说来，积分区域 $\mathscr{D}$ 是光滑的. 但是我们可以对此加以推广：积分区域 $\mathscr{D}$ 可看做是若干个流形上的带边区域的组合. 这样来理解积分区域的话，则流形上的积分对于积分区域 $\mathscr{D}$ 也有可加性. 流形的带边子流形称为流形上的**奇异链**(下面简称**链**). 而奇异链的边界是一个低一维的奇异链. 完全类似于流形上的微分形式，所有奇异链与定义在其上的微分形式之间可以由流形上的积分联系起来. 而对于 k 维奇异链 $\mathscr{D}_k$，其边界为 $\partial\mathscr{D}_k$，∂ 相当于由 $\mathscr{D}_k$ 到 $\partial\mathscr{D}_k$ 的一个算子，称为链上的**边缘算子**. 算子 ∂ 将链 $\mathscr{D}_k$ 的维数降低一维.

值得注意的是，边缘算子 ∂ 与微分算子 d(也称为**上边缘算子**)之间有十分相似的地方. 如对于任意的微分形式 $\boldsymbol{\omega}$(也可称为流形上的**上链**)，有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})=\mathbf{0}$；而对于奇异链 $\mathscr{D}$，有 $\partial(\partial\mathscr{D})=\varnothing$，即边界

的边界为空集. 这件事实不是因为别的，而是由于流形上的积分建立了 k 维链 $\mathscr{D}_k$ 与 k 次上链 $\boldsymbol{\omega}_k$ 之间的对偶关系. 为了更好地说明这一点，我们记流形 $\mathscr{M}$ 上所有 k 维链 $\mathscr{D}_k$ 组成的集合为 $\mathscr{C}_k$，而 k 次上链 $\boldsymbol{\omega}_k$ 组成的集合为 Λ^k，流形上的积分记为

$$(\mathscr{D}_k,\boldsymbol{\omega}_k)=\int_{\mathscr{D}_k}\boldsymbol{\omega}_k, \tag{4.3.24}$$

则

$$(\cdot,\cdot):\mathscr{C}_k\times\Lambda^k\to\mathbb{R} \tag{4.3.25}$$

是集合 $\mathscr{C}_k$ 与 Λ^k 的对偶关系，并且是线性的. 因此积分运算可以看做是定义在 $\mathscr{C}_k$ 与 Λ^k 上的线性函数. 而 Stokes 公式则是给定了对偶关系(4.3.25)的一个恒等式：

$$(\partial\mathscr{D},\boldsymbol{\omega})=(\mathscr{D},\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}). \tag{4.3.26}$$

对于上链 $\boldsymbol{\omega}$，有恰当形式与闭形式的概念. 同样，对于链 $\mathscr{D}_k$，也可以定义闭链与恰当链. 若 $\partial\mathscr{D}_k=\varnothing$，则 $\mathscr{D}_k$ 为**闭链**；若存在 $\mathscr{D}_{k+1}$，使得 $\mathscr{D}_k=\partial\mathscr{D}_{k+1}$，则称 $\mathscr{D}_k$ 为**恰当链**.

对任意的恰当链 $\mathscr{D}_k$，有 $\partial\mathscr{D}_k=\partial(\partial\mathscr{D}_{k+1})=\varnothing$，即恰当链一定是闭链. 而闭链什么时候为恰当链呢？这就取决于流形的拓扑结构. 有一个与 De Rham 定理对偶的定理，即一个闭链 $\mathscr{D}_k$ 为恰当链当且仅当对于流形上任意的一个闭形式 $\boldsymbol{\omega}_k$，有

$$\int_{\mathscr{D}_k}\boldsymbol{\omega}_k=0. \tag{4.3.27}$$

关于链和上链之间关系的研究有待于关于同调群与上同调群的讨论，已经超出了本书的范围，这里我们就不进行讲述了.

§4.4　Lie 导数

一、流形上的向量场

回顾第三章中关于流形上的切丛和切向量场的定义，我们知道，在流形 $\mathscr{M}$ 上点 $\boldsymbol{p}=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 的局部坐标系中，任意切向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 可

表示为

$$\boldsymbol{\xi}=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\in\mathscr{T}_p(\mathscr{M}).\tag{4.4.1}$$

上式表示，在点 $\boldsymbol{p}$ 的局部坐标系中，切向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 就与如下的一个自治微分方程组的初值问题建立起来一一对应关系：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=\xi^i(x^1(t),\cdots,x^n(t)),\\ x^i(0)=x_0^i.\end{cases}\tag{4.4.2}$$

在局部坐标中看，上述系统的解就是向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 在点 $\boldsymbol{p}$ 的积分曲线，同时 $\boldsymbol{\xi}$ 也就是该积分曲线的切向量. 由常微分方程组的理论知，只要 $\xi^i(\boldsymbol{x})$ 是光滑函数，则存在唯一的解满足初值问题(4.4.2)：

$$x^i=F_t^i(x_0^1,\cdots,x_0^n)=x^i(t,x_0^1,\cdots,x_0^n).\tag{4.4.3}$$

我们现在换一个角度来看(4.4.3)式. 固定参数 t，则(4.4.3)式实际上建立了由初始点 $(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 到点 $(x^1,\cdots,x^n)$ 的一个映射：

$$\boldsymbol{F}_t:(x_0^1,\cdots,x_0^n)\longmapsto(x^1(t,x_0^1,\cdots,x_0^n),\cdots,x^n(t,x_0^1,\cdots,x_0^n)).\tag{4.4.4}$$

当参数 t 充分小时，映射 $\boldsymbol{F}_t$ 将点 $\boldsymbol{p}$ 的邻域一一地、映上地连续变换到点 $(x^1,\cdots,x^n)$ 的邻域，并且逆映射也是连续的. 另外，由向量场的光滑性可知，在点 $\boldsymbol{p}$ 的充分小邻域中映射 $\boldsymbol{F}_t$ 还是光滑映射. 满足上述这些性质的映射 $\boldsymbol{F}_t$ 称为**局部的微分同胚**. 为了进一步说明这一点，我们对小参数 t 应用 Taylor 公式来看一下映射 $\boldsymbol{F}_t$ 具体是什么形式：

一个十分明显的事实就是：

$$x^i(t,x_0^1,\cdots,x_0^n)=x_0^i+t\xi^i(x_0^1,\cdots,x_0^n)+o(t),\tag{4.4.5}$$

因此映射 $\boldsymbol{F}_t$ 的 Jacobi 矩阵元素满足

$$\frac{\partial x^i(t)}{\partial x_0^j}=\delta_j^i+t\,\frac{\partial\xi^i(x_0^1,\cdots,x_0^n)}{\partial x_0^j}+o(t).\tag{4.4.6}$$

显然，$(\boldsymbol{F}_t)^{-1}$ 的 Jacobi 矩阵元素满足

$$\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j(t)} = \delta_j^i - t\frac{\partial \xi^i(x_0^1,\cdots,x_0^n)}{\partial x_0^j} + o(t). \qquad (4.4.7)$$

由(4.4.5)式知，当 t 与 s 充分小的时候，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{t+s} = \boldsymbol{F}_t \circ \boldsymbol{F}_s, \\ (\boldsymbol{F}_t)^{-1} = \boldsymbol{F}_{-t}. \end{cases} \qquad (4.4.8)$$

因此 $\boldsymbol{F}_t$ 对于小参数 t 构成一个局部的坐标变换群.

由上面的一些讨论我们看出，定义在流形上的向量场，在流形的每一点的邻域上诱导出了一个局部的映射，这个局部的映射相当于一个坐标变换，它有(4.4.5)式至(4.4.8)式所述的一些性质. 由这样的一个从向量场诱导出的局部的坐标变换，我们就可以引进流形上的张量场的 Lie① 导数.

二、Lie 导数

前面我们谈到对于流形上的任一切向量场，它都诱导出一局部的微分同胚，该微分同胚是一局部的坐标变换. 那么流形上的任一张量场 $\boldsymbol{T}$ 在局部的坐标变换下是什么样子呢? 下面我们就来讨论这个问题.

设切向量场 ξ 在点 $\boldsymbol{p}$ 的邻域诱导出坐标变换 $\boldsymbol{F}_t$，$\boldsymbol{T}$ 是流形上的一个(p,q)阶张量场，在局部坐标中，$\boldsymbol{T}=\left(T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}\right)$. 在坐标变换 $\boldsymbol{F}_t$ 下，$\boldsymbol{T}$ 变为 $\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{T}$：

$$(\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{T})_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p} = T_{k_1\cdots k_q}^{l_1\cdots l_p}\frac{\partial x^{k_1}(t)}{\partial x_0^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{k_q}(t)}{\partial x_0^{j_q}}\frac{\partial x_0^{i_1}}{\partial x^{l_1}(t)}\cdots\frac{\partial x_0^{i_p}}{\partial x^{l_p}(t)}. \qquad (4.4.9)$$

显然 $\boldsymbol{F}_0=\boldsymbol{I}$ 是恒同映射. 下面我们引入 Lie 导数的定义.

定义 4.3　张量场 $\boldsymbol{T}=\left(T_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}\right)$沿向量场 ξ 的 **Lie 导数**定义为一个张量场 $L_\xi\boldsymbol{T}$，它在局部坐标下表示为

① S. Lie(1842—1899)，挪威数学家.

$$(L_\xi \boldsymbol{T})^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{T})^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right]_{t=0}. \tag{4.4.10}$$

若将 $\boldsymbol{F}_t$ 看做流形的点 $\boldsymbol{p}$ 邻域沿切向量场的一个变形，则 Lie 导数 $L_\xi \boldsymbol{T}$ 刻画了在这个变形下张量的改变率.

由 $\boldsymbol{F}_t$ 的性质可以计算出 Lie 导数的表达式. 为此，将(4.4.6)与(4.4.7)两式及(4.4.9)式代入到(4.4.10)式中，有

$$\begin{aligned}(L_\xi \boldsymbol{T})^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} &= \xi^k \frac{\partial T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^k} + T^{i_1\cdots i_p}_{kj_2\cdots j_q}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^{j_1}} + \cdots + T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}k}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^{j_q}} \\ &\quad - T^{ki_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial \xi^{i_1}}{\partial x^k} - \cdots - T^{i_1\cdots i_{p-1}k}_{j_1\cdots j_q}\frac{\partial \xi^{i_p}}{\partial x^k}.\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

Lie 导数的概念实际上是力学中的随体导数的推广. 设有一个物理量 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(t,\boldsymbol{x})$，其中空间位置 $\boldsymbol{x}$ 是时间 t 的函数，记 $\boldsymbol{\xi}=\dot{\boldsymbol{x}}$，则量 $\boldsymbol{T}$ 的随体导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial t} + L_\xi \boldsymbol{T}. \tag{4.4.12}$$

下面我们来看一下几个简单例子.

例 1　零阶张量场即光滑函数 f 的 Lie 导数就是该函数的方向导数：

$$L_\xi f = \partial_\xi f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{4.4.13}$$

如果 f 的 Lie 导数恒为零，即

$$L_\xi f = \partial_\xi f = 0, \tag{4.4.14}$$

则说明 f 沿向量 $\boldsymbol{\xi}$ 的积分曲线为常量，这时方程 $f(x^1,\cdots,x^n)=\text{const}$ 为方程组 $\dot{x}^i=\xi^i$ 的第一积分.

例 2　对于度量张量场(g_{ij})，关于向量场 $\boldsymbol{u}$ 的 Lie 导数为

$$(L_u \boldsymbol{g})_{ij} = u^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj}\frac{\partial u^k}{\partial x^i} + g_{ik}\frac{\partial u^k}{\partial x^j} \equiv 2\varepsilon_{ij}, \tag{4.4.15}$$

这里 ε_{ij} 就是小应变条件下的应变张量，当初始构形 g_{ij} 为欧氏度量，即 $g_{ij}=\delta_{ij}$ 时，有

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right)\quad（这里不需区分上下标）. \tag{4.4.16}$$

(4.4.15)式说明,应变张量为度量张量在向量场 $\boldsymbol{u}$(位移场)下的 Lie 导数.

三、Lie 导数的性质

先来看向量场 $\boldsymbol{\eta}$ 关于向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 的 Lie 导数. 由定义,有

$$(L_{\xi}\boldsymbol{\eta})^i = \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}. \tag{4.4.17}$$

上式关于 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{\eta}$ 显然是反称的,即有

$$L_{\xi}\boldsymbol{\eta} = -L_{\eta}\boldsymbol{\xi}. \tag{4.4.18}$$

由于 $L_{\xi}\boldsymbol{\eta}$ 仍然是一个向量场,因而我们可以进一步来讨论对该向量场的 Lie 导数. 对于光滑函数 f,有

$$L_{L_{\xi}\eta} f = \partial_{L_{\xi}\eta} f = \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{4.4.19}$$

我们来看对 f 关于 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 的二次 Lie 导数的可交换性:

$$\begin{aligned} L_{\xi}(L_{\eta} f) - L_{\eta}(L_{\xi} f) &= L_{\xi}\left(\eta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - L_{\eta}\left(\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \\ &= \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\eta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \\ &= \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_{L_{\xi}\eta} f. \end{aligned} \tag{4.4.20}$$

也就是说,函数对 $L_{\xi}\boldsymbol{\eta}$ 的 Lie 导数是否为零刻画了函数关于 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 这两个向量的二次方向导数的可交换性.

利用 Lie 导数可以定义如下的 **Poisson**[①] **括号**运算:

$$[\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}] = L_{\xi}\boldsymbol{\eta}. \tag{4.4.21}$$

可以验证 Poisson 括号有如下性质:

(1) $[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}](f+g)=[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]f+[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]g$;

(2) $[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}](fg)=f[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]g+g[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]f$;

(3) $[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]=-[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}]$;

---

① Poisson(1781—1840),法国数学家.

(4) $[\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}]=[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\zeta}]+[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}]$;

(5) $[f\boldsymbol{\xi},g\boldsymbol{\eta}]=f(L_{\xi}g)\boldsymbol{\eta}-g(L_{\eta}f)\boldsymbol{\xi}+fg[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]$;

(6) $[\boldsymbol{\xi},[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}]]+[\boldsymbol{\eta},[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi}]]+[\boldsymbol{\zeta},[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]]=\mathbf{0}$.

上述性质组成了 Lie 导数的运算性质. 由于 Poisson 括号是流形上的向量场的二元运算,因此该运算构成了流形上的切空间中的一种代数结构,称为 **Lie 代数**,它和流形上的连续变换群即 Lie 群之间有密切的联系.

对于流形上的微分形式,同样可以求其对于向量场的 Lie 导数. 一个十分有用的结论是:对于一个微分形式,Lie 导数运算和外微分运算是可交换的.

§ 4.5 Frobenius 定理

一、预备讨论

Frobenius① 定理是关于流形上的切向量场及微分形式的重要定理,它在微分方程、几何和力学中都有广泛的应用. 为此我们首先来考虑如下的常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x,y)}{g(x,y)}. \tag{4.5.1}$$

求它的积分相当于求一个二维流形 $\mathscr{M}^2$ 的一维子流形,使得其每一点 (x,y) 上的切向量为

$$(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=(g(x,y),f(x,y)).$$

这个问题可以另外表述为以下两种形式,即:求零次微分形式 $\varphi(x,y)$,使它的外微分是一次微分形式

$$\boldsymbol{\omega}=\mathrm{d}\varphi=f(x,y)\mathrm{d}x-g(x,y)\mathrm{d}y=\mathbf{0},$$

而 $\varphi(x,y)$ 的等值线就是问题(4.5.1)的解曲线. 与这个问题对偶的形式,是求 Pfaff 方程

① Frobenius(1849—1917),德国数学家.

$$g(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

的第一积分 $\psi(x,y)=C$，它所确定的曲线也是问题(4.5.1)的解.

对于比较复杂一些的情形，如一阶偏微分方程组

$$F_\alpha\left(x^1,\cdots,x^m;y^1,\cdots,y^n;\frac{\partial y^1}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial y^1}{\partial x^m};\cdots;\frac{\partial y^n}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial y^n}{\partial x^m}\right)=0$$
$$(\alpha=1,\cdots,mn),\tag{4.5.2}$$

通过这组方程我们可以在某个局部解出 mn 个偏导数：

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^i}=G_i^j(x^1,\cdots,x^m;y^1,\cdots,y^n)$$
$$(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n).\tag{4.5.3}$$

不妨令 $m=3,n=2$，我们要从方程组(4.5.3)求解出：

$$y^1=f^1(x^1,x^2,x^3),\quad y^2=f^2(x^1,x^2,x^3).\tag{4.5.4}$$

从另外一个角度说，考虑一个由 $(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5)=(x^1,x^2,x^3,y^1,y^2)$ 形成的五维流形，问题(4.5.3)就是要求它的一个三维子流形(4.5.4)，使得它的每一点上有三个切向量：

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_1=(\xi_1^i)=(1,0,0,G_1^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),G_1^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),\\ \boldsymbol{X}_2=(\xi_2^i)=(0,1,0,G_2^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),G_2^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),\\ \boldsymbol{X}_3=(\xi_3^i)=(1,0,0,G_3^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),G_3^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})).\end{cases}\tag{4.5.5}$$

上述这组向量在每一点组成了一个三维向量空间 Δ_3，构成我们要求的三维子流形的切空间，这相当于求解三个 Pfaff 方程：

$$\begin{cases}\xi_1^i\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x^i}=0,\\ \xi_2^i\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x^i}=0,\\ \xi_3^i\dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x^i}=0.\end{cases}\tag{4.5.6}$$

求得解

$$\varphi_i(x^1,x^2,x^3,x^4,x^5)=C_i\quad(i=1,2,3),\tag{4.5.7}$$

这就是所要求的三维子流形.

进一步,考虑在 n 维联络空间中给定了联络系数 $\Gamma_{ij}^{k}(i,j,k=1,\cdots,n)$,我们便有其空间基向量的微分关系:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^{k}\boldsymbol{e}_k. \tag{4.5.8}$$

如果把这组方程的 n 个自变量 $x^i(i=1,\cdots,n)$ 和确定基向量 $\boldsymbol{e}_i$ 的 n^2 个分量合起来看做一个 $n(n+1)$ 维流形,(4.5.8)式相当于给定了 n 个$n(n+1)$维向量:

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_1 = \left(1,0,\cdots,0,\dfrac{\partial e_j^i}{\partial x^1}\right), \\ \boldsymbol{X}_2 = \left(0,1,\cdots,0,\dfrac{\partial e_j^i}{\partial x^2}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{X}_n = \left(0,0,\cdots,1,\dfrac{\partial e_j^i}{\partial x^n}\right). \end{cases} \tag{4.5.9}$$

那么,是否有一个 n 维流形的切空间是由这些向量张成的?

对于我们以上提出的三类问题,一般提法如下:

给定光滑流形 $\mathscr{M}$ 上的 r 个光滑切向量场:

$$\boldsymbol{\xi}_1, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\xi}_r, \tag{4.5.10}$$

它们在流形上一点的邻域 $\mathscr{U}$ 中是线性无关的. 一个很自然的问题是:在邻域 $\mathscr{U}$ 中的每一点上是否存在局部坐标系$(\mathscr{W},x^i)$,使得

$$\boldsymbol{\xi}_i\Big|_{\mathscr{W}} = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i=1,\cdots,r) \tag{4.5.11}$$

成立? 由§4.4中关于向量场的 Lie 导数的讨论,我们知

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]^k = \delta_i^l\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\delta_j^k\right) - \delta_j^l\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\delta_i^k\right) = 0, \tag{4.5.12}$$

即一般地有

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \boldsymbol{0}. \tag{4.5.13}$$

因此当(4.5.11)式成立的时候,必定有

$$[\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j] = \mathbf{0} \quad (i = 1, \cdots, r). \tag{4.5.14}$$

反过来,(4.5.14)式也是(4.5.11)式成立的充分条件.要证明这一点需要采用下面关于 Frobenius 定理的证明方法.

上面的问题对向量场 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 的要求较为苛刻.一般我们考虑如下的问题.对于流形 $\mathscr{M}$ 上一点 $\boldsymbol{p}$ 的切空间 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$,由切向量场 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 可以张成它的一个子空间,记做

$$\Delta_r(\boldsymbol{p}) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r\}. \tag{4.5.15}$$

若在点 $\boldsymbol{p}$ 的邻域 $\mathscr{U}$ 中,切向量场 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 均是线性无关的,并且是光滑的,使得在 $\mathscr{U}$ 中的每一点 $\boldsymbol{q}$ 上都张成一个切子空间 $\Delta_r(\boldsymbol{q})$,则称

$$\Delta_r|_{\mathscr{U}} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r\} \tag{4.5.16}$$

为 $\mathscr{U}$ 上的**切子空间场**,或称为 $\mathscr{M}$ 上的 r 维**光滑分布**(简称**分布**).由于$\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 的线性无关性,因此 r 维光滑分布是被 Δ_r所确定的相差一个以光滑函数为系数的非退化线性变换.我们要讨论的问题是:对于流形 $\mathscr{M}$ 上的 r 维光滑分布 Δ_r,是否存在局部坐标系$(\mathscr{W}, x^i)$,使得

$$\Delta_r|_{\mathscr{W}} = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^r}\right\}. \tag{4.5.17}$$

回答这个问题需要用到 §4.4 中提到的 Lie 导数的性质.在这里利用 Poisson 括号的记法是方便的.另外,若上述 r 维分布满足:

$$[\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j] = C_{ij}^k \boldsymbol{\xi}_k \quad (i, j, k = 1, \cdots, r), \tag{4.5.18}$$

则称之为**对合分布**.这里 C_{ij}^k 一般来讲是点 $\boldsymbol{p}$ 邻域内的光滑函数,称为对合分布的**结构常数**.(4.5.18)式说明切子空间场 Δ_r 内的任意两个切向量场的 Lie 导数仍然属于该切子空间场.这个条件也称为 **Frobenius 条件**.有了这些说明,我们就可以来回答上面提出的问题了.

二、Frobenius 定理

定理 4.6(Frobenius 定理)　设 Δ_r是定义在光滑流形 $\mathscr{M}$ 上的

一个开集 $\mathscr{U}$ 上的 r 维分布，则对于任意一点 $p\in\mathscr{U}$，存在 p 的局部坐标卡$(\mathscr{W},x^i)$，使得

$$\Delta_r|_{\mathscr{W}\subset\mathscr{U}}=\operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^r}\right\}\tag{4.5.19}$$

成立的充分必要条件是 Δ_r满足 Frobenius 条件，即 Δ_r为对合分布.

证明　必要性　由于$\Delta_r|_{\mathscr{W}}=\operatorname{span}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^r}\right\}$，则对于 Δ_r中的任意 r 个线性无关的切向量场 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$，它们均可表示为

$$\boldsymbol{\xi}_i=\alpha_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}\quad(i,j=1,\cdots,r),\tag{4.5.20}$$

因此有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j]&=\left[\alpha_i^k\frac{\partial}{\partial x^k},\alpha_j^l\frac{\partial}{\partial x^l}\right]\\&=\alpha_i^k\frac{\partial\alpha_j^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^l}-\alpha_j^l\frac{\partial\alpha_i^k}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial x^k}+\alpha_i^k\alpha_j^l\left[\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right]\\&=\left(\alpha_i^k\frac{\partial\alpha_j^l}{\partial x^k}-\alpha_j^k\frac{\partial\alpha_i^l}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}=C_{ij}^m\boldsymbol{\xi}_m,\end{aligned}\tag{4.5.21}$$

其中第三个等式用到了(4.5.13)式，所有的指标均是从 1 到 r，而

$$C_{ij}^m=\left(\alpha_i^k\frac{\partial\alpha_j^l}{\partial x^k}-\alpha_j^k\frac{\partial\alpha_i^l}{\partial x^k}\right)\beta_l^m,\tag{4.5.22}$$

这里(β_l^m)是方阵(α_i^j)的逆阵. 这样我们就证明了分布是对合分布，即 Δ_r 满足 Frobenius 条件.

充分性　对分布的维数进行数学归纳法. 首先当 $r=1$ 时，我们来证明定理. 分布 Δ_r 是由一个非零的切向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 所张成的线性子空间. 设在点 p 存在局部坐标卡$(\mathscr{U},u^i)$，并且 $u^i(p)=0$. 在该局部坐标卡中，$\boldsymbol{\xi}$ 可一般地表示为

$$\boldsymbol{\xi}|_{\mathscr{U}}=\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}\quad(i=1,\cdots,n),\tag{4.5.23}$$

这里 ξ^i是 $\mathscr{U}$ 上的光滑函数. 由于 $\boldsymbol{\xi}(p)\neq\mathbf{0}$，无妨设 $\xi^1(p)\neq0$. 由于 ξ^1 的光滑性，在邻域 $\mathscr{U}$ 中可设 ξ^1 处处不为零. 考虑常微分方程组：

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}u^1}=\frac{\xi^i(u^1,\cdots,u^n)}{\xi^1(u^1,\cdots,u^n)}\quad(2\leqslant i\leqslant n),\tag{4.5.24}$$

这里 u^1 是自变量，而 $u^2,\cdots,u^n$ 是未知函数. 根据常微分方程组的理论，存在正数 $\delta>0$，使得

$$\{(u^1,\cdots,u^n):\ |u^i|<\delta\}\subset\mathscr{U},\tag{4.5.25}$$

并且对任意给定的初值 $(v^2,\cdots,v^n)$，$|v^i|<\delta\ (i=2,\cdots,n)$，方程组 (4.5.24) 有唯一解

$$u^i=\varphi^i(u^1;v^2,\cdots,v^n),\quad |u^1|<\delta\quad(i=2,\cdots,n)\tag{4.5.26}$$

满足初始条件：

$$\varphi^i(0;v^2,\cdots,v^n)=v^i\quad(i=2,\cdots,n).\tag{4.5.27}$$

解 φ^i 光滑依赖于初值 v^i 和自变量 u^1.

作局部坐标变换：

$$\begin{cases}u^1=v^1,\\ u^i=\varphi^i(v^1;v^2,\cdots,v^n),\ i=2,\cdots,n.\end{cases}\tag{4.5.28}$$

在点 $\boldsymbol{p}$ 的一个邻域 $\mathscr{W}\subset\mathscr{U}$ 中，变换的 Jacobi 行列式为

$$\left.\frac{\partial(u^1,\cdots,u^n)}{\partial(v^1,\cdots,v^n)}\right|_{v^1=0}=1,\tag{4.5.29}$$

即该坐标变换在局部中非退化. 在局部坐标卡 $(\mathscr{W},v^i)$ 中，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}|_{\mathscr{W}}&=\sum_{i=1}^n\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}=\xi^1\frac{\partial}{\partial u^1}+\sum_{i=2}^n\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}\\&=\xi^1\frac{\partial}{\partial u^1}+\sum_{i=2}^n\xi^1\frac{\partial u^i}{\partial u^1}\frac{\partial}{\partial u^i}\\&=\xi^1\sum_{i=1}^n\frac{\partial u^i}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial u^i}=\xi^1\frac{\partial}{\partial v^1}.\end{aligned}\tag{4.5.30}$$

令

$$x^1=\int_0^{v^1}\frac{\mathrm{d}v^1}{\xi^1},\quad x^i=v^i\quad(i=2,\cdots,n),\tag{4.5.31}$$

则 $\{x^i\}$ 是 $\mathscr{W}$ 上的局部坐标，并且

$$\boldsymbol{\xi}|_{\mathscr{W}} = \xi^1 \frac{\partial}{\partial v^1} = \frac{\partial}{\partial x^1}. \tag{4.5.32}$$

因此我们证明了当 $r=1$ 时定理成立.

假设对 $r-1$ 维分布 Δ_{r-1} 存在局部坐标卡$(\mathscr{W}, x^i)$，使得

$$\Delta_{r-1}|_{\mathscr{W}} = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{r-1}}\right\},$$

我们下面证明对 Δ_r 也有类似的结论. 假设 Δ_r 由 $\mathscr{U}$ 上线性无关的切向量场 $\boldsymbol{\xi}_1, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r$ 所张成，并且由条件，有

$$[\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j] = C_{ij}^k \boldsymbol{\xi}_k \quad (k, i, j = 1, \cdots, r). \tag{4.5.33}$$

由 $r=1$ 时的结论，存在局部坐标系$(y^1, \cdots, y^n)$，使得

$$\boldsymbol{\xi}_r = \frac{\partial}{\partial y^r}. \tag{4.5.34}$$

令

$$\boldsymbol{\xi}_i' = \boldsymbol{\xi}_i - (L_{\boldsymbol{\xi}_i} y^r)\boldsymbol{\xi}_r \quad (i = 1, \cdots, r-1), \tag{4.5.35}$$

显然 $\boldsymbol{\xi}_1', \cdots, \boldsymbol{\xi}_{r-1}', \boldsymbol{\xi}_r$ 仍然是线性无关的，因此

$$\Delta_r = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\xi}_1', \cdots, \boldsymbol{\xi}_{r-1}', \boldsymbol{\xi}_r\}, \tag{4.5.36}$$

由(4.5.35)式可得

$$L_{\boldsymbol{\xi}_i'} y^r = 0 \ (i = 1, \cdots, r-1), \quad L_{\boldsymbol{\xi}_r} y^r = 1. \tag{4.5.37}$$

由于(4.5.36)式，利用假设条件，我们知 $\boldsymbol{\xi}_1', \cdots, \boldsymbol{\xi}_{r-1}', \boldsymbol{\xi}_r$ 也是对合分布，即

$$[\boldsymbol{\xi}_i', \boldsymbol{\xi}_j'] = C_{ij}^k \boldsymbol{\xi}_k' + \alpha_{ij} \boldsymbol{\xi}_r \quad (i, j, k = 1, \cdots, r-1). \tag{4.5.38}$$

上式的两边分别对 y^r 作 Lie 导数，得

$$\begin{cases} L_{[\boldsymbol{\xi}_i', \boldsymbol{\xi}_j']} y^r = L_{\boldsymbol{\xi}_i'}(L_{\boldsymbol{\xi}_j'} y^r) - L_{\boldsymbol{\xi}_j'}(L_{\boldsymbol{\xi}_i'} y^r) = 0, \\ L_{(C_{ij}^k \boldsymbol{\xi}_k' + \alpha_{ij} \boldsymbol{\xi}_r)} y^r = C_{ij}^k L_{\boldsymbol{\xi}_k'} y^r + \alpha_{ij} L_{\boldsymbol{\xi}_r} y^r = \alpha_{ij}. \end{cases}$$

因此，一般地有 $\alpha_{ij}=0(i, j=1, \cdots, r-1)$. 从(4.5.38)式来看，知

$$\Delta_{r-1} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\xi}_1', \cdots, \boldsymbol{\xi}_{r-1}'\} \tag{4.5.39}$$

也是对合分布. 由归纳法假设，存在局部坐标系$\{z^1, \cdots, z^n\}$，使得

$$\Delta_{r-1} = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{r-1}}\right\}. \tag{4.5.40}$$

由条件(4.5.37)式得

$$L_{\frac{\partial}{\partial z^i}} y^r = 0 \quad (i = 1, \cdots, r-1). \tag{4.5.41}$$

这时再来看对合分布 Δ_r,在局部坐标$\{z^i\}$下,Δ_r 可表示为

$$\Delta_r = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{r-1}}, \boldsymbol{\xi}_r\right\}. \tag{4.5.42}$$

由于 Δ_r 是对合分布,因此

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^i}, \boldsymbol{\xi}_r\right] = \sum_{k=1}^{r-1} C_i^k \frac{\partial}{\partial z^k} + b_i \boldsymbol{\xi}_r \quad (i = 1, \cdots, r-1), \tag{4.5.43}$$

其中 C_i^k 为常数. 上式两边对 y^r 作 Lie 导数,得 $b_i = 0$ $(i=1,\cdots,r-1)$,因此

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^i}, \boldsymbol{\xi}_r\right] = \sum_{k=1}^{r-1} C_i^k \frac{\partial}{\partial z^k} \quad (i = 1, \cdots, r-1). \tag{4.5.44}$$

设在$\{z^i\}$下 $\boldsymbol{\xi}_r$ 可表示为

$$\boldsymbol{\xi}_r = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial z^i}, \tag{4.5.45}$$

这时有

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^i}, \boldsymbol{\xi}_r\right] = \left[\frac{\partial}{\partial z^i}, \sum_{k=1}^{n} \xi^k \frac{\partial}{\partial z^k}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi^k}{\partial z^i} \frac{\partial}{\partial z^k} \quad (i = 1, \cdots, r-1). \tag{4.5.46}$$

与(4.5.44)式表示的结果比较,得

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial z^i} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant r-1; r \leqslant k \leqslant n). \tag{4.5.47}$$

这说明 $\xi^k (k=r,\cdots,n)$只是$(z^r,\cdots,z^n)$的函数. 令

$$\boldsymbol{\xi}_r' = \sum_{k=r}^{n} \xi^k \frac{\partial}{\partial z^k} = \boldsymbol{\xi}_r - \sum_{k=1}^{r-1} \xi^k \frac{\partial}{\partial z^k}, \tag{4.5.48}$$

则仍有

$$\Delta_r = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{r-1}}, \boldsymbol{\xi}_r'\right\}. \tag{4.5.49}$$

由 $r=1$ 时的结论知,存在从$(z^r,\cdots,z^n)$到$(x^r,\cdots,x^n)$的局部坐标

变换，使得 $\boldsymbol{\xi}_r'$ 可表示为

$$\boldsymbol{\xi}_r' = \frac{\partial}{\partial x^r}. \tag{4.5.50}$$

上述变换由于 $\xi^k(k=r,\cdots,n)$ 只与 $(z^r,\cdots,z^n)$ 有关，因此不涉及 $(z^1,\cdots,z^{r-1})$. 再令 $x^i=z^i(i=1,\cdots,r-1)$，则在局部坐标 $\{x^i\}$ 下，有

$$\Delta_r = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x^r}\right\}. \tag{4.5.51}$$

定理的结论得证. ▌

三、外微分方程与 Frobenius 定理的第二种形式

Frobenius 定理是针对流形上的切向量场进行讨论的. 由于流形上的切向量与微分形式的对偶性质，该定理也可以用外微分与微分形式来叙述，而且可以看为 Poincare 定理的推广.

为了用微分形式来叙述 Frobenius 定理，我们首先引进一个关于流形上切向量场与微分形式之间的引理.

引理 设 $\boldsymbol{\omega}$ 是光滑流形 $\mathscr{M}$ 上的一次微分形式，$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 是流形上的两个切向量场，则有

$$(\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\eta},\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) = L_{\xi}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\omega}) - L_{\eta}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}) - ([\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}],\boldsymbol{\omega}), \tag{4.5.52}$$

这里的圆括号表示对偶关系，它的性质在第一章中曾讨论过.

证明 因为两边对 $\boldsymbol{\omega}$ 是线性的，因此无妨假设 $\boldsymbol{\omega}$ 是一个单项式，即令

$$\boldsymbol{\omega} = g\mathrm{d}f, \tag{4.5.53}$$

其中 $f,g\in\mathscr{F}(\mathscr{M})$. 由假设，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f. \tag{4.5.54}$$

由第一章中引进的外积的性质，我们有

$$(\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\eta},\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\eta},\mathrm{d}g\wedge\mathrm{d}f)$$

$$= \begin{vmatrix} (\boldsymbol{\xi},\mathrm{d}g) & (\boldsymbol{\xi},\mathrm{d}f) \\ (\boldsymbol{\eta},\mathrm{d}g) & (\boldsymbol{\eta},\mathrm{d}f) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{\xi}g & L_{\xi}f \\ L_{\eta}g & L_{\eta}f \end{vmatrix}$$

$$= L_\xi g \cdot L_\eta f - L_\eta g \cdot L_\xi f. \tag{4.5.55}$$

而

$$(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\eta}, g\mathrm{d}f) = g(\boldsymbol{\eta},\mathrm{d}f) = gL_\eta f, \tag{4.5.56}$$

因而有

$$L_\xi(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\omega}) = L_\xi(gL_\eta f) = L_\xi g \cdot L_\eta f + gL_\xi(L_\eta f). \tag{4.5.57}$$

同理,有

$$L_\eta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}) = L_\eta g \cdot L_\xi f + gL_\eta[L_\xi f]. \tag{4.5.58}$$

上面两式相减,利用(4.5.55)式得

$$\begin{aligned} L_\xi(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\omega}) - L_\eta(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}) &= L_\xi g \cdot L_\eta f - L_\eta g \cdot L_\xi f + g(L_\xi L_\eta - L_\eta L_\xi)f \\ &= (\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\eta},\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) + gL_{[\xi,\eta]}f \\ &= (\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\eta},\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) + g([\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}],\mathrm{d}f) \\ &= (\boldsymbol{\xi}\wedge\boldsymbol{\eta},\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}) + ([\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}],\boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \tag{4.5.59}$$

因此引理得证. ▌

有了上面的引理,就可以引入对偶形式的 Frobenius 定理. 设有流形 $\mathscr{M}$ 上的分布 Δ_r,对于流形 $\mathscr{M}$ 上的任一点 $\boldsymbol{p}$,$\Delta_r(\boldsymbol{p})$ 为 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 的 r 维线性子空间. 记

$$\Delta_r^\perp(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{\omega}:\ \boldsymbol{\omega} \in \mathscr{T}_p^*(\mathscr{M}), \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \Delta_r(\boldsymbol{p}), (\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega}) = 0\}. \tag{4.5.60}$$

显然 $\Delta_r^\perp(\boldsymbol{p})$是余切空间 $\mathscr{T}_p^*(\mathscr{M})$的 $n-r$ 维线性子空间.

设在点 $\boldsymbol{p}$ 有

$$\Delta_r(\boldsymbol{p}) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r\}. \tag{4.5.61}$$

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_r$ 扩充为 $\mathscr{T}_p(\mathscr{M})$ 中的一组基底 $\{\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n\}$. 令 $\{\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^n\}$ 是 $\mathscr{T}_p^*(\mathscr{M})$ 中与之对偶的一组基底,即满足

$$(\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\omega}^j) = \delta_i^j, \tag{4.5.62}$$

则显然有

$$\Delta_p^\perp(\boldsymbol{p}) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\omega}^{r+1},\cdots,\boldsymbol{\omega}^n\}. \tag{4.5.63}$$

因此在点 $\boldsymbol{p}$ 的邻域上,分布 Δ_r 等价于方程组

$$\boldsymbol{\omega}^s = \boldsymbol{0} \quad (s = r+1,\cdots,n) \tag{4.5.64}$$

的解流形(此方程组也称为 **Pfaff 方程组**). 由引理 4.1 有

$$(\boldsymbol{\xi}_i\wedge\boldsymbol{\xi}_j,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^s)=L_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{\xi}_j,\boldsymbol{\omega}^s)-L_{\boldsymbol{\xi}_j}(\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\omega}^s)-([\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j],\boldsymbol{\omega}^s)$$
$$=-([\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j],\boldsymbol{\omega}^s) \quad (4.5.65)$$
$$(i,j=1,\cdots,r;\ s=r+1,\cdots,n).$$

当 Δ_r 是对合分布,即满足 Frobenius 条件时,由(4.5.65)式可得

$$(\boldsymbol{\xi}_i\wedge\boldsymbol{\xi}_j,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^s)=0 \quad (i,j=1,\cdots,r;\ s=r+1,\cdots,n). \quad (4.5.66)$$

下面我们要证明满足(4.5.66)式的 $\mathrm{d}\omega^s$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^s=\sum_{k=r+1}^{n}\boldsymbol{\psi}_k^s\wedge\boldsymbol{\omega}^k \quad (s=r+1,\cdots,n), \quad (4.5.67)$$

其中 $\boldsymbol{\psi}_k^s$ 为一次微分形式.

在基底 $\{\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^n\}$ 中,一般地,$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^s$ 可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^s=\sum_{k=r+1}^{n}\boldsymbol{\psi}_k^s\wedge\boldsymbol{\omega}^k+\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}C_{\alpha\beta}^s\boldsymbol{\omega}^\alpha\wedge\boldsymbol{\omega}^\beta \quad (s=r+1,\cdots,n). \quad (4.5.68)$$

将上述 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^s$ 的一般形式代到(4.5.66)式中,可知 Δ_r 是对合分布等价于

$$\begin{aligned}0&=(\boldsymbol{\xi}_i\wedge\boldsymbol{\xi}_j,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^s)\\&=\sum_{k=r+1}^{n}(\boldsymbol{\xi}_i\wedge\boldsymbol{\xi}_j,\boldsymbol{\psi}_k^s\wedge\boldsymbol{\omega}^k)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}C_{\alpha\beta}^s(\boldsymbol{\xi}_i\wedge\boldsymbol{\xi}_j,\boldsymbol{\omega}^\alpha\wedge\boldsymbol{\omega}^\beta)\\&=\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}C_{\alpha\beta}^s(\delta_i^\alpha\delta_j^\beta-\delta_i^\beta\delta_j^\alpha)\\&=C_{ij}^s-C_{ji}^s \quad (i,j=1,\cdots,r;\ s=r+1,\cdots,n).\end{aligned} \quad (4.5.69)$$

由上面的关系知 C_{ij}^s 对下标是对称的,又 C_{ij}^s 对下标显然是反称的,因此有 $C_{ij}^s=0(i,j=1,\cdots,r;\ s=r+1,\cdots,n)$,即得(4.5.67)式成立. 而由第一章中关于外形式的性质的讨论,我们知道(4.5.67)式等价于条件

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^s\wedge\boldsymbol{\omega}^{r+1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\omega}^n=\mathbf{0} \quad (s=r+1,\cdots,n). \quad (4.5.70)$$

上面的一系列讨论告诉我们,分布 Δ_r 在点 $\boldsymbol{p}$ 的邻域是对合的

等价于(4.5.70)式成立. 由 Frobenius 定理我们知道, Δ_r 是对合的等价于存在点 $\boldsymbol{p}$ 的一个局部坐标, 使得

$$\Delta_r(\boldsymbol{p}) = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^r}\right\}. \tag{4.5.71}$$

另一方面, 我们知道

$$\Delta_r^{\perp}(\boldsymbol{p}) = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\omega}^{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\omega}^n\}, \tag{4.5.72}$$

因此一般有

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \boldsymbol{\omega}^s\right) = 0 \quad (i = 1, \cdots, r;\ s = r+1, \cdots, n). \tag{4.5.73}$$

将 $\boldsymbol{\omega}^s = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^s \mathrm{d}x^i$ 代入到上式, 知

$$\omega_i^s = 0 \quad (i = 1, \cdots, r;\ s = r+1, \cdots, n), \tag{4.5.74}$$

即有

$$\boldsymbol{\omega}^s = \sum_{i=r+1}^{n} \omega_i^s \mathrm{d}x^i \quad (s = r+1, \cdots, n). \tag{4.5.75}$$

比较(4.5.75)与(4.5.72)两式知

$$\Delta_r^{\perp}(\boldsymbol{p}) = \mathrm{span}\{\mathrm{d}x^{r+1}, \cdots, \mathrm{d}x^n\}. \tag{4.5.76}$$

(4.5.76)式意味着在点 $\boldsymbol{p}$ 的邻域内存在局部坐标系 $(x^1, \cdots, x^n)$, 使子流形

$$x^s = \mathrm{const} \quad (s = r+1, \cdots, n) \tag{4.5.77}$$

适合于 Pfaff 方程组(4.5.64). 这时也称 Pfaff 方程组(4.5.64)是**完全可积**的. 由此 Frobenius 定理可改写如下的定理:

定理 4.7　Pfaff 方程组

$$\boldsymbol{\omega}^s = \mathbf{0} \quad (s = 1, \cdots, r) \tag{4.5.78}$$

完全可积的充分必要条件是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^s \wedge \boldsymbol{\omega}^1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\omega}^r = \mathbf{0} \quad (s = 1, \cdots, r). \tag{4.5.79}$$

定理 4.7 就是这一节要得到的最后结论.

四、Frobenius 定理的应用

例 1　设在欧氏空间 $\mathscr{E}^3$ 中有全微分方程

$$\boldsymbol{\omega} \equiv P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z, \tag{4.5.80}$$

其中 P,Q,R 均是 $\mathscr{E}^3$ 上的光滑函数. 上述方程完全可积是指在 $\mathscr{E}^3$ 中任一点的每一个充分小的邻域内存在光滑函数 F,使得

$$F(x,y,z) = \text{const} \tag{4.5.81}$$

是(4.5.80)式的首次积分. 由定理 4.7,(4.5.80)式完全可积的充分必要条件是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}, \tag{4.5.82}$$

即

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{4.5.83}$$

如果记 $\boldsymbol{G}=(P,Q,R)$ 为 $\mathscr{E}^3$ 中向量场,则上述充分必要条件可表述为

$$\boldsymbol{G}\cdot\mathbf{curl}\boldsymbol{G} = 0, \tag{4.5.84}$$

即该向量场的旋度和向量场是正交的.

例 2　设函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 满足偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + P_1 f + Q_1 g + R_1 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + P_2 f + Q_2 g + R_2 = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} + U_1 f + V_1 g + S_1 = 0, \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} + U_2 f + V_2 g + S_2 = 0, \end{cases} \tag{4.5.85}$$

其中 $P_i,Q_i,R_i,U_i,V_i,S_i(i=1,2)$ 均是 (x,y) 的已知函数. 为了判断上述方程组是否完全可积,可以将它们写成两个一次微分形式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = \mathrm{d}f + \boldsymbol{P}f + \boldsymbol{Q}g + \boldsymbol{R}, \\ \boldsymbol{\beta} = \mathrm{d}g + \boldsymbol{U}f + \boldsymbol{V}g + \boldsymbol{S}, \end{cases} \tag{4.5.86}$$

其中

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P} = P_1 \mathrm{d}x + P_2 \mathrm{d}y, \quad \boldsymbol{Q} = Q_1 \mathrm{d}x + Q_2 \mathrm{d}y, \\ &\boldsymbol{R} = R_1 \mathrm{d}x + R_2 \mathrm{d}y, \quad \boldsymbol{U} = U_1 \mathrm{d}x + U_2 \mathrm{d}y, \\ &\boldsymbol{V} = V_1 \mathrm{d}x + V_2 \mathrm{d}y, \quad \boldsymbol{S} = S_1 \mathrm{d}x + S_2 \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{4.5.87}$$

采用延拓结构方法，将(f,g,x,y)看做是某一四维流形上的坐标，在方程组(4.5.85)的解流形上，有

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}. \tag{4.5.88}$$

按照定理 4.7，(4.5.88)式完全可积的充分必要条件是

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{4.5.89}$$

最后，将(4.5.86)式代入到(4.5.89)式中，得到

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{U} = \mathbf{0}, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{V} = \mathbf{0}, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{R} + \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{S} = \mathbf{0}, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{P} + \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{U} = \mathbf{0}, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{R} + \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{S} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{4.5.90}$$

这就是方程组(4.5.85)的可积性条件.

例 3　气体力学中常见的 **Mayer** 方程组为

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \psi_j^i(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^m) \quad (i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n), \tag{4.5.91}$$

其中 ψ_j^i 是 $m \times n$ 个光滑函数. 同样，采用延拓结构方法，将$(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^m)$看做是 $n+m$ 维流形上的坐标，构造 m 个流形上的一次微分形式：

$$\boldsymbol{\omega}^i \equiv \mathrm{d}y^i - \sum_{j=1}^{n} \psi_j^i(x,y)\mathrm{d}x^j \quad (i = 1, \cdots, m). \tag{4.5.92}$$

于是，方程组(4.5.91)式等价于

$$\boldsymbol{\omega}^i = \mathbf{0} \quad (i = 1, \cdots, m). \tag{4.5.93}$$

一方面，由 Frobenius 定理，方程组(4.5.93)的完全可积充分

必要条件为

$$d\boldsymbol{\omega}^i = \sum_{s=1}^{m} \boldsymbol{\alpha}_s^i \wedge \boldsymbol{\omega}^s \quad (i = 1,\cdots,m); \tag{4.5.94}$$

另一方面，由(4.5.92)式知

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\omega}^i &= d(dy^i) - d\Big(\sum_{j=1}^{n} \psi_j^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dx^j\Big) \\
&= -\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j^i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \psi_j^i}{\partial y^s} dy^s \wedge dx^j \\
&= -\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j^i}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \psi_j^i}{\partial y^s} dx^j \wedge \boldsymbol{\omega}^s \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \psi_j^i}{\partial y^s} \sum_{k=1}^{n} \psi_k^s dx^k \wedge dx^j \\
&= \sum_{s=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_j^i}{\partial y^s} dx^j\Big) \wedge \boldsymbol{\omega}^s + \sum_{k,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial \psi_j^i}{\partial x^k} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial \psi_j^i}{\partial y^s}\psi_k^s\Big) dx^j \wedge dx^k.
\end{aligned}$$

因此(4.5.94)式成立的充分必要条件是

$$\frac{\partial \psi_j^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \psi_k^i}{\partial x^j} + \sum_{s=1}^{m}\Big(\frac{\partial \psi_j^i}{\partial y^s}\psi_k^s - \frac{\partial \psi_k^i}{\partial y^s}\psi_j^s\Big) = 0 \tag{4.5.95}$$

$$(i = 1,\cdots,m;\ j,k = 1,\cdots,n).$$

此即 Mayer 方程组(4.5.91)完全可积的充分必要条件.

习 题 四

1. 计算下列外微分：

(1) $d(\cos x^2 dx^1 - \sin x^1 dx^2)$；

(2) $d(2x^1x^2 dx^1 + (x^1)^2 dx^2)$；

(3) $d(6x^3 dx^1 \wedge dx^2 - x^1x^2 dx^1 \wedge dx^3)$.

2. 证明：$\int_{\mathscr{D}} *(\mathrm{div}\boldsymbol{\omega}) = \int_{\partial\mathscr{D}} *\boldsymbol{\omega}$， $\int_{\mathscr{D}} *(\mathbf{curl}\boldsymbol{\omega}) = \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{\omega}$.

3. 设有方程组 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = g(x,y,z)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = h(x,y,z)$，并设 $z=$

$f(x,y)$是方程组的一个解. 记 $\boldsymbol{X}=\frac{\partial}{\partial x}+g\frac{\partial}{\partial z}$,$\boldsymbol{Y}=\frac{\partial}{\partial y}+h\frac{\partial}{\partial z}$,试证 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 在曲面 $z=f(x,y)$ 上每一点张成的空间是曲面的切平面，同时，函数 $f(x,y)$ 的混合导数与次序无关对应于 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 是对合的.

4. 在$\mathbb{R}^3$中给定

$$\boldsymbol{\xi}_1=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y},\quad \boldsymbol{\xi}_2=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},\quad \boldsymbol{\xi}_3=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z},$$

求它们之间的 Poisson 括号.

5. 判断下列微分形式是否是闭形式和恰当形式：

(1) $\boldsymbol{\varphi}=yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$;

(2) $\boldsymbol{\varphi}=x\mathrm{d}x+x^2y^2\mathrm{d}y+yz\mathrm{d}z$;

(3) $\boldsymbol{\varphi}=2xy^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+z\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$.

6. 令 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 是 n 维向量空间中的一组基，$\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2,\cdots,\boldsymbol{\omega}^n$ 是其对偶基，$(\boldsymbol{\xi}_j,\boldsymbol{\omega}^i)=\delta^i_j$，试证：$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^k=-\frac{1}{2}C^k_{ij}\boldsymbol{\omega}^i\wedge\boldsymbol{\omega}^j$，其中 C^k_{ij} 满足

$$[\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j]=C^k_{ij}\boldsymbol{\xi}_k.$$

7. 令 $\mathscr{U}$ 为以 g_{ij} 为度量的 Riemann 空间内有光滑边界的有限区域，$\Omega^p_{\mathscr{U}}$ 是在 $\mathscr{U}$ 外为零的 p 次光滑微分形式的集合. 引进 $\Omega^p_{\mathscr{U}}$ 中的内积：

$$(\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2)=\int_{\mathscr{U}}\boldsymbol{\omega}^1\wedge*\boldsymbol{\omega}^2,\quad \boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2\in\Omega^p_{\mathscr{U}}.$$

(1) 试讨论一点上微分形式的内积

$$\{\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2\}=\frac{1}{p!}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_pj_p}\overset{1}{\omega}_{i_1\cdots i_p}\overset{2}{\omega}_{j_1\cdots j_p}$$

与上述积分形式的内积之间的关系；

(2) 证明：若定义算子 $\delta=(-1)^{np+n+1}*\mathrm{d}*$，则

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2)=(\boldsymbol{\omega}^1,\delta\boldsymbol{\omega}^2);$$

(3) 对于(2)中的算子 δ，证明：$\delta^2=0$；

(4) 证明：令 $\Delta=\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d}$，则算子 Δ 在 $\Omega^p_{\mathscr{U}}$ 上是自共轭的，即

$$(\Delta\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2)=(\boldsymbol{\omega}^1,\Delta\boldsymbol{\omega}^2);$$

(5) 对于(4)中的算子 Δ，证明：$\Delta \mathrm{d}=\mathrm{d}\Delta,\Delta\delta=\delta\Delta,\Delta *=*\Delta$.

8. 令 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n$ 为 n 维 Riemann 空间中的正交向量场，$\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2,\cdots,\boldsymbol{\omega}_n$ 为其对偶基，$\boldsymbol{\omega}_i(\boldsymbol{X}_j)=\delta_{ij}$，并定义

$$\boldsymbol{\omega}_{ij}=\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{\omega}_k,\quad \boldsymbol{\Omega}_{ij}=\frac{1}{2}R_{ijkl}\boldsymbol{\omega}_k\wedge\boldsymbol{\omega}_l,$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{(k)}=\boldsymbol{\Omega}_{i_1i_2}\wedge\boldsymbol{\Omega}_{i_2i_3}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\Omega}_{i_{k-1}i_k}\wedge\boldsymbol{\Omega}_{i_ki_1},$$

$$\boldsymbol{\Omega}=\varepsilon^{i_1\cdots i_m}\boldsymbol{\Omega}_{i_1i_2}\wedge\boldsymbol{\Omega}_{i_3i_4}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{\Omega}_{i_{n-1}i_n}\quad(\text{当 } n \text{ 为偶数时}).$$

求证：

(1) $\boldsymbol{\omega}_{ij}=-\boldsymbol{\omega}_{ji}$；

(2) $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i=-\boldsymbol{\omega}_j\wedge\boldsymbol{\omega}_{ij}$；

(3) $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{ij}=\boldsymbol{\omega}_{ik}\wedge\boldsymbol{\omega}_{kj}-\boldsymbol{\Omega}_{ij}$；

(4) $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_{ij}=-\boldsymbol{\Omega}_{ik}\wedge\boldsymbol{\omega}_{kj}+\boldsymbol{\omega}_{ik}\wedge\boldsymbol{\Omega}_{kj}$；

(5) $\boldsymbol{\Omega}_{(k)},\boldsymbol{\Omega}$ 是线性无关的；

(6) $\boldsymbol{\Omega}_{(k)},\boldsymbol{\Omega}$ 均为闭形式，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_{(k)}=\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{0}$；

(7) 对于 $n=2$，有 $\boldsymbol{\Omega}=\kappa\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2$；

(8) 在伪 Riemann 空间中推导上述结果.

第五章　Lie 群与 Lie 代数

§5.1　基本概念

一、Lie 群

由 S. Lie 提出的 Lie 群的理论在近代力学、物理和几何学中发挥了巨大的作用. Lie 群最早提出是为了求解微分方程而讨论的连续变换群. 本书第四章讨论过的由方程(4.4.3)确定的变换(4.4.8)就是一个依于参数 t 的变换群.

Lie 群是在近代几门主要数学分支的交点上产生和发展起来的. 它把代数、分析和几何的思想结合起来而又在物理学和力学中得到了广泛的应用.

在前面各章中我们已经个别地介绍过一些变换群. 本章我们要系统地介绍这方面的理论. 但由于 Lie 群研究的内容很多，有许多专门论述 Lie 群的专著，本章只对 Lie 群和 Lie 代数作一些初略的介绍，作为入门的引导.

例 1　在平面 $\mathbb{R}^2$ 上给了旋转变换，它把 $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2)$ 变到 $\tilde{\boldsymbol{x}}=(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2)$，这个变换的式子可以写为 $\mathcal{O}(2)$，即

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{5.1.1}$$

式中

$$\boldsymbol{A}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi). \tag{5.1.2}$$

对参数 φ 的一个值，我们有一个变换，于是将 $\varphi\in[-\pi,\pi]$ 和 $\mathcal{O}(2)$ 中的元素一一对应起来. $\varphi=0$ 对应于恒同变换即群中的单位

元素$\boldsymbol{A}(0)$，$\boldsymbol{A}(\varphi)$的逆变换为$\boldsymbol{A}(-\varphi)$. 连续两次变换φ,ψ，结果是

$$\boldsymbol{A}(\varphi)\cdot\boldsymbol{A}(\psi)=\boldsymbol{A}(\varphi+\psi),$$

这就是变换的乘法. 由此可见这是一个单参数群.

现在我们一般地来讨论连续变换群. 设给了流形$\mathscr{M}$上的变换群$\mathscr{G}$，则$\mathscr{G}$的元素$\boldsymbol{g}$确定了流形$\mathscr{M}$到自己的一个对应，记为

$$\boldsymbol{g}\in\mathscr{G},\quad \boldsymbol{g}:\mathscr{M}\to\mathscr{M}. \tag{5.1.3}$$

若这个变换由函数关系φ来实现，令$\boldsymbol{w}',\boldsymbol{w}$为流形$\mathscr{M}$上的两个对应点的坐标，则点的变换为

$$\boldsymbol{g}:\ \boldsymbol{w}'=\varphi(\boldsymbol{g},\boldsymbol{w}). \tag{5.1.4}$$

定义 5.1 如果由变换$\boldsymbol{g}$构成的集合$\mathscr{G}$满足下面的四个条件：

(1) 当$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{e}$(单位元素)时，有$\varphi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w}$;

(2) 对于$\forall\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2\in\mathscr{G}$, $\exists\boldsymbol{g}_3\in\mathscr{G}$，使得若$\boldsymbol{w}'=\varphi(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{w})$, $\boldsymbol{w}''=\varphi(\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{w}')$，则有

$$\boldsymbol{w}''=\varphi(\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{w}')=\varphi(\boldsymbol{g}_2,\varphi(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{w}))=\varphi(\boldsymbol{g}_3,\boldsymbol{w})=\varphi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2),\boldsymbol{w}),$$

这里$\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2)$，也就是说在$\mathscr{G}$中按上式定义了乘法；

(3) 按以上定义的乘法符合结合律，即

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{g}_3,\varphi(\boldsymbol{g}_2,\varphi(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{w})))&=\varphi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3),\varphi(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{w}))\\&=\varphi(\boldsymbol{g}_3,\varphi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2),\boldsymbol{w}))\\&=\varphi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3)),\boldsymbol{w})\\&=\varphi(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2),\boldsymbol{g}_3),\boldsymbol{w}),\end{aligned}$$

亦即$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_2,\boldsymbol{g}_3))=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2),\boldsymbol{g}_3)$;

(4) 对于$\boldsymbol{g}\in\mathscr{G}$, $\exists\boldsymbol{g}^{-1}\in\mathscr{G}$，使得有

$$\varphi(\boldsymbol{g},\varphi(\boldsymbol{g}^{-1},\boldsymbol{w}))=\varphi(\boldsymbol{e},\boldsymbol{w})=\boldsymbol{w},$$

则称$\mathscr{G}$为**Lie 变换群**(简称**Lie 群或变换群**).

满足以上几条，我们也说定义了一个流形$\mathscr{M}$上的 Lie 变换群. 在本书后面的讨论中，我们还要求：

(1) 上述函数φ与$\boldsymbol{f}$都是无穷可微的；

(2) 对于 Lie 变换群$\mathscr{G}$中的元素，可以由一个流形$\mathscr{M}$上的开区域$\mathscr{V}$中的点来表述.

一般我们假定 $\mathscr{M}$ 是包含 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的邻域. 在这个假定下, 对上述 $\mathscr{G}$ 中的元素 $\boldsymbol{g}$ 就可以引进坐标, 以 $\boldsymbol{x}=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 来表示 $\boldsymbol{g}$, 于是 $\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2)$ 这一式子可以一般地表为无穷光滑的向量函数:

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \tag{5.1.5}$$

可见, 讨论 Lie 变换群的问题归结于讨论函数 $\boldsymbol{f}$ 的问题, $\boldsymbol{f}$ 定义为

$$\boldsymbol{f}:\ \mathscr{M}\times\mathscr{M}\rightarrow\mathscr{M}. \tag{5.1.6}$$

上述就是一般 Lie 变换群所满足的条件. 请读者试验证我们在前几章中所引进的各种变换群的例子都是满足这些条件的.

二、Lie 群核

从前面的讨论可知, 在变换群中, 由(5.1.5)式定义的 $2n$ 元函数 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是很重要的. 它本身在流形上定义了一个二元运算. 现在我们来讨论当变换 φ 组成变换群时, 函数 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 应当满足什么条件.

设在原点 $\boldsymbol{e}=(0,0,\cdots,0)$ 的邻域 $\mathscr{V}$ 上定义了光滑函数 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 它满足:

(1) 若对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathscr{V}$, $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 都有定义且 $\boldsymbol{z}\in\mathscr{V}$, 则 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 定义了一个从 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 到 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 的运算;

(2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e})=\boldsymbol{x}$;

(3) 若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in\mathscr{V}$, 则有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}));$$

(4) 对于 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathscr{V}$, $\exists\,\boldsymbol{y}\in\mathscr{V}$, 使得 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{e}$.

定义 5.2　满足以上条件(1)～(4)的向量函数 $\boldsymbol{f}$ 的集合称为定义在 $\mathscr{V}$ 上的 **Lie 群核**(有时称为 **Lie 群芽**).

由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是二元向量函数, 当其中的一个向量给定, 例如给定了 $\boldsymbol{g}\in\mathscr{G}$, 则有

$$R_{\boldsymbol{g}}:\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{g})=\boldsymbol{z}\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{y}\circ\boldsymbol{g}\in\mathscr{G}. \tag{5.1.7}$$

这个变换称为**右移动**. 同样可以对 $\boldsymbol{g}\in\mathscr{G}$ 定义**左移动**:

$$L_g:\ f(g,y)=z\overset{\text{def}}{=\!=}g\circ y\in\mathscr{G}.\qquad(5.1.8)$$

R_g 和 L_g 都可以有逆变换，即 R_g^{-1} 和 L_g^{-1} 存在，所以它们规定了 $\mathscr{G}\to\mathscr{G}$ 的一个同胚，即把 y 变到了 z 而且是双方单值的.

Lie 群既然是连续变换群，现在我们考虑在 Lie 群 $\mathscr{G}$ 上从原点 $e=(0,0,\cdots,0)$ 出发的一条曲线：

$$a(t)=(a^1(t),a^2(t),\cdots,a^n(t)),$$

它满足 $a(0)=e$ 并且连续可微. 曲线 $a(t)$ 在点 e 的切向量 $\alpha=\left.\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ 称为 $a(t)$ 的无限小向量. 所有 $\mathbb{R}^n$ 中的向量都可以看做 $\mathscr{G}$ 内原点邻域 $\mathscr{V}$ 中的过原点 e 的可微曲线的切向量. 例如，曲线 $a(t)=\alpha t$ 的切向量也是 α.

现在我们来讨论函数 $f(x,y)$ 在原点的 Jacobi 矩阵是什么.

我们显然有

$$\left.\frac{\partial f^i(x,e)}{\partial x^j}\right|_{x=e}=\lim_{\Delta x^j\to 0}\frac{f^i(0,\cdots,\Delta x^j,\cdots,0;0,\cdots,0)-f^i(0,\cdots,0;0,\cdots,0)}{\Delta x^j}$$

$$=\lim_{\Delta x^j\to 0}\frac{\Delta x^k\delta_k^i}{\Delta x^j}=\delta_j^i,$$

在上式分子的计算中考虑到定义 5.2 的条件(2). 于是我们有

$$\left(\left.\frac{\partial f^i(x,y)}{\partial x^j}\right|_{x=y=e}\right)=I\quad(\text{单位矩阵}).\qquad(5.1.9)$$

同理，有

$$\left(\left.\frac{\partial f^i(x,y)}{\partial y^j}\right|_{x=y=e}\right)=I.\qquad(5.1.10)$$

这就是说，左移动与右移动在原点的梯度矩阵都是单位矩阵.

若 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 是 Lie 群，在积流形定义下，$\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2$ 也是 Lie 群. 事实上，我们只要在 $\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2$ 中定义 Lie 群的乘法：若 $(g_1,g_2),(h_1,h_2)\in\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2$，则

$$(g_1,g_2)\circ(h_1,h_2)=(g_1\circ h_1,g_2\circ h_2)\in\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2.$$

易于验证它仍符合 Lie 群的定义. 群 $\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2$ 称为 $\mathscr{G}_1$ 与 $\mathscr{G}_2$ 的**直积**.

三、Lie 代数

定义 5.3 设有线性向量空间 $\mathscr{L}^n$. 若在其中定义了反对称的双线性算子(也称为 **Lie 积**):

$$[\cdot,\cdot]:\mathscr{L}^n\times\mathscr{L}^n\to\mathscr{L}^n, \tag{5.1.11}$$

并且对 $\forall\,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}\in\mathscr{L}^n$,这个算子满足:

(1) 反交换律: $[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]=-[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]$;

(2) Jacobi 恒等式:

$$[\boldsymbol{\xi},[\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}]]+[\boldsymbol{\eta},[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\xi}]]+[\boldsymbol{\zeta},[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]]=\mathbf{0}, \tag{5.1.12}$$

则称 $\mathscr{L}^n$ 为一个 **Lie 代数**.

例 2 在上一章 §4.4 中介绍的 Lie 导数的 Poisson 括号所满足的六条性质正好符合 Lie 代数的定义. 所在流形上的向量场在定义了Poisson 括号的条件下构成了 Lie 代数.

例 3 在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中,向量的外积,即向量的叉乘组成一个 Lie 代数. 这一结论对欧氏空间和伪欧氏空间都正确(参考第一章习题 4).

例 4 设在 n 阶阵的集合 $\mathscr{M}_{n\times n}$ 中,对于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathscr{M}_{n\times n}$,定义 Lie 积:

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}, \tag{5.1.13}$$

其中 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都是普通的矩阵乘法. 易于验证,运算 $[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 对它的两个元素都是线性的,且显然反交换律成立. 现在来验证它满足 Jacobi 恒等式. 事实上,有

$$[\boldsymbol{A},[\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]]=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]-[\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]\boldsymbol{A}=\boldsymbol{ABC}-\boldsymbol{ACB}-\boldsymbol{BCA}+\boldsymbol{CBA}.$$

将上式中的 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 作轮换得

$$[\boldsymbol{B},[\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}]]=\boldsymbol{BCA}-\boldsymbol{BAC}-\boldsymbol{CAB}+\boldsymbol{ACB},$$

$$[\boldsymbol{C},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]]=\boldsymbol{CAB}-\boldsymbol{CBA}-\boldsymbol{ABC}+\boldsymbol{BAC}.$$

三式相加得

$$[\boldsymbol{A},[\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}]]+[\boldsymbol{B},[\boldsymbol{C},\boldsymbol{A}]]+[\boldsymbol{C},[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]]=\mathbf{0}. \tag{5.1.14}$$

由乘法的定义(5.1.11)式,若在一个线性向量空间上取定了

基底$\{\boldsymbol{\xi}_i\}$，则由于上述乘法的闭合性，应当有

$$[\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j]=c_{ij}^k\boldsymbol{\xi}_k, \tag{5.1.15}$$

式中c_{ij}^k为常数，称为 Lie 代数在基底$\{\boldsymbol{\xi}_i\}$下的**结构常数**. 由于 Lie 积的反交换律，有

$$c_{ij}^k=-c_{ji}^k. \tag{5.1.16}$$

同时由于 Jacobi 恒等式成立，因而有

$$c_{ij}^h c_{hk}^l+c_{jk}^h c_{hi}^l+c_{ki}^h c_{hj}^l=0\quad(1\leqslant i,j,k,l\leqslant n). \tag{5.1.17}$$

(5.1.16)式和(5.1.17)式就是这些结构常数应当满足的条件.

回忆在向量代数中叉乘定义，有

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k,$$

这里的ε_{ijk}就是上述的c_{ij}^k，显然向量的叉乘构成一个 Lie 代数.

四、变换诱导的切向量变换

设$\mathscr{M}$和$\mathscr{N}$都是n维流形，在第三章定义 3.4 中我们定义了流形之间的映射：

$$\boldsymbol{F}:\mathscr{M}\to\mathscr{N}. \tag{5.1.18}$$

现在设$\boldsymbol{x}\in\mathscr{M}$，并且$\boldsymbol{\xi}\in\mathscr{T}_x(\mathscr{M})$，我们要定义$\mathscr{N}$上一个由映射$\boldsymbol{F}$引进的与$\boldsymbol{\xi}$相对应的切向量$\boldsymbol{\eta}\in\mathscr{T}_y(\mathscr{N})$，其中

$$y^i=F^i(x^1,x^2,\cdots,x^n)\quad(i=1,2,\cdots,n), \tag{5.1.19}$$

而向量$\boldsymbol{\eta}$的定义为

$$\eta^i=\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\xi^j. \tag{5.1.20}$$

这个式子实际上给了$\mathscr{T}_x(\mathscr{M})\to\mathscr{T}_y(\mathscr{N})$的一个对应，它是由变换$\boldsymbol{F}$诱导的切空间的映射：

$$\boldsymbol{F}_*:\mathscr{T}_x(\mathscr{M})\to\mathscr{T}_{\boldsymbol{F}(x)}(\mathscr{N}). \tag{5.1.21}$$

可以看出，$\boldsymbol{F}_*$是一个线性变换，亦即线性映射. 和$\boldsymbol{F}_*$相关的是将$\mathscr{T}_y(\mathscr{N})$的余切空间$\mathscr{T}_y^*(\mathscr{N})$映射到$\mathscr{T}_x^*(\mathscr{M})$上的映射：

$$\boldsymbol{F}^*:\mathscr{T}_y^*(\mathscr{N})\to\mathscr{T}_x^*(\mathscr{M}). \tag{5.1.22}$$

若令 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{T}_x^*(\mathscr{M})$，$\boldsymbol{\beta}\in\mathscr{T}_y^*(\mathscr{N})$，则由切空间与余切空间的对偶关系：

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\eta}=\alpha_j\xi^j=\beta_i\eta^i=\beta_i\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\xi^j, \qquad (5.1.23)$$

有

$$\alpha_j=\beta_i\frac{\partial F^i}{\partial x^j}, \qquad (5.1.24)$$

即 $\boldsymbol{F}^*$ 的转换矩阵仍然是 $\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)$.

变换(5.1.20)可以这样来理解：令 γ: $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 是 $\mathscr{M}$ 上过点 $\boldsymbol{x}_0$ 的光滑曲线，它在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的切向量为

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=\boldsymbol{\xi}, \qquad (5.1.25)$$

式中假设 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$. 当 $\mathscr{M}$ 经过变换后，曲线 γ 变到了 $\mathscr{N}$ 上的曲线 δ：

$$\delta:\ y^i(t)=F^i(x^1(t),x^2(t),\cdots,x^n(t)), \qquad (5.1.26)$$

它在 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$ 点的切向量为

$$\eta^i=\left.\frac{\mathrm{d}y^i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\cdot\frac{\mathrm{d}x^j(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=\left.\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\xi^j\right|_{t=t_0}. \qquad (5.1.27)$$

这就是公式(5.1.20). 它给了一条曲线变换前后切向量之间的关系.

有了切向量之间的变换讨论，现在回到 Lie 群上来. 由于在 Lie 群 $\mathscr{G}$ 上引进了坐标，我们就可以把 $\mathscr{G}$ 也看做流形. 既然 L_g 和 R_g 都是流形 $\mathscr{G}$ 到自己的变换，则对它也可以引进如(5.1.20)式规定的切向量的变换. 例如，对左移动 L_g，由(5.1.8)式，可以认为它是由变换

$$L_g:\ z^i=f^i(\boldsymbol{g},y^1,y^2,\cdots,y^n) \qquad (5.1.28)$$

来规定的. 在这个变换下，切向量由点 $\boldsymbol{y}$ 的 $\boldsymbol{\xi}$ 变到点 $\boldsymbol{z}$ 的 $\boldsymbol{\eta}$，根据(5.1.20)式，其变换公式由下式给出：

$$\eta^i = \frac{\partial f^i}{\partial y^j}\xi^j. \tag{5.1.29}$$

根据上面的讨论，我们引进如下的定义：

定义 5.4　如果在 Lie 群 $\mathcal{G}$ 上，对于任意的 $g \in \mathcal{G}$ 所定义的左移动变换(5.1.28)诱导的切向量的变换(5.1.29)，能使某个向量 ξ 保持不变，则向量 ξ 称为 $\mathcal{G}$ 的**左不变向量**，即 ξ 满足：

$$\xi^i(z) = \frac{\partial f^i}{\partial y^j}(g, y)\xi^j(y). \tag{5.1.30}$$

下面我们讨论左不变向量场的存在性. 显然由于(5.1.30)式在 Lie 群 $\mathcal{G}$ 上都成立，所以当 $g=e, y=e$ 时也应成立. 令 $\xi^i(y) = \xi^i(e) = \alpha^i$ (α^i 为任意的常量)，由于(5.1.30)式右端的矩阵 $\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j}\right)$ 在点 $y=e$ 为单位矩阵，所以它在点 $y=e$ 的邻域内非退化. 于是由(5.1.30)式可以在点 e 的邻域内唯一地确定一个向量场($\xi^i(z)$)，即在点 e 的邻域内确定了一个左不变向量场. 这一事实将点 e 邻域内的左不变向量场与过点 e 的 $\mathcal{G}$ 的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 一一对应了起来，即 $\mathcal{T}_e(\mathcal{G})$ 的向量空间与 $\mathcal{G}$ 的左不变向量场建立了对应关系. 由于 $\mathcal{T}_e(\mathcal{G})$ 是 n 维的，所以左不变向量场也是 n 维的.

同样我们也可以定义右不变向量场.

§5.2　Lie 群与 Lie 代数

一、Lie 群的 Lie 代数

上一节我们定义了 Lie 群 $\mathcal{G}$ 的左不变向量场，并且说明了左不变向量场和定义在 e 处的切空间 $\mathcal{T}_e(\mathcal{G})$ 的向量是一一对应的. 现在我们对 $\mathcal{T}_e(\mathcal{G})$ 来进行讨论. 我们发现 $\mathcal{T}_e(\mathcal{G})$ 内除了可以定义加法和数与向量的乘法以外，还可以定义 Lie 乘法.

令 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{T}_e(\mathcal{G})$，并定义了相应于它们的两个在 $\mathcal{G}$ 中的向量场 $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$. 由上一节的讨论，$\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ 在 $\mathcal{G}$ 上是光滑的，所以按照第四章

§4.4 的讨论我们可以定义它们的 Lie 导数：L_{ξ}，L_{η} 和 Lie 括号 $[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]$. 容易验证 Lie 括号对不变向量场来说是封闭的，即若 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 都是不变向量场，则$[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]$也是不变向量场.

在第四章我们知道，若 $\boldsymbol{\xi}_i(i=1,\cdots,n)$是 Lie 群 $\mathscr{G}$ 上的左不变向量场，则有

$$[\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j]=c_{ij}^k\boldsymbol{\xi}_k, \tag{5.2.1}$$

这里 c_{ij}^k 是结构系数. 现在我们来证明对于 Lie 群 $\mathscr{G}$ 的左不变向量场来说，c_{ij}^k 是常数. 事实上，由(5.1.30)式，对于任意的 $\boldsymbol{y}\in\mathscr{G}$，我们有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\xi}_i(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{\xi}_j(\boldsymbol{y})]&=[\boldsymbol{f}_*\boldsymbol{\xi}_i(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{f}_*\boldsymbol{\xi}_j(\boldsymbol{x})]=\boldsymbol{f}_*[\boldsymbol{\xi}_i(\boldsymbol{e}),\boldsymbol{\xi}_j(\boldsymbol{e})]\\&=\boldsymbol{f}_*c_{ij}^k\boldsymbol{\xi}_k(\boldsymbol{e})=c_{ij}^k\boldsymbol{f}_*\boldsymbol{\xi}_k(\boldsymbol{e})=c_{ij}^k\boldsymbol{\xi}_k(\boldsymbol{y}),\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

就是说 c_{ij}^k 是常数. c_{ij}^k 称为 Lie 群的**结构常数**，即若 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j\in\mathscr{T}_e(\mathscr{G})$，则

$$[\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j]=c_{ij}^k\boldsymbol{\alpha}_k. \tag{5.2.3}$$

显然，由 Lie 括号的性质知，c_{ij}^k 满足§5.1 中的(5.1.16)和(5.1.17)两组恒等式，且(5.2.3)式满足定义 5.3 关于 Lie 代数的要求. 所以我们有结论：

定理 5.1　Lie 群 $\mathscr{G}$ 在原点 $\boldsymbol{e}$ 的切空间 $\mathscr{T}_e(\mathscr{G})$，在引进 Lie 积(5.2.3)的条件下组成一个 Lie 代数(这个 Lie 代数记为 $\mathscr{g}$，称为群 $\mathscr{G}$ 的 Lie 代数).

例 1　考虑变换群 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$. 由于两个连续的变换相当于两个矩阵的乘积，我们可以用

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{XY}$$

表示群变换规律. 为了求变换群的左不变向量场，考虑

$$\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Y}_1 \tag{5.2.4}$$

令 $\boldsymbol{Z}_1=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\zeta}(t)$，$\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\gamma}(t)$，$\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\eta}_1(t)$，上式即可写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\zeta}(t)&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\eta}_1(t))\\&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\eta}_1(0)),\end{aligned}$$

这里 $\boldsymbol{\gamma}(t)$，$\boldsymbol{\eta}_1(t)$和 $\boldsymbol{\zeta}(t)$都是矩阵，t 是群参数，矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\gamma}(t)$就

是(5.1.28)式中的 $\boldsymbol{g}$. 上式的后一个等号成立是由于 $\boldsymbol{Z}_1$ 是左不变向量场，它由 $t=0$ 的值 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\eta}_1(0)$ 通过(5.2.4)式决定.

设我们还有一个由(5.2.4)式所确定的左不变向量场 $\boldsymbol{Z}_2=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\xi}(t)$, $\boldsymbol{Z}_2=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Y}_2$, $\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\eta}_2(t)$, $\boldsymbol{\eta}_2(0)=\boldsymbol{\alpha}$，即有

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\xi}(t)=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\alpha}).$$

由第四章所定义的 Lie 导数，进而考虑这两个左不变向量场的 Poisson 括弧，我们有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{Z}_1]&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\xi}(t))\cdot(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\zeta}(t))-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\zeta}(t))\cdot(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\xi}(t))\\&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}].\end{aligned}$$

这说明两个矩阵变换群左不变向量场的 Poisson 括弧与其在单位向量处的向量(即常矩阵上的矩阵 Lie 代数)是同态的.

例 2 一、二维 Lie 代数的分类.

Lie 代数决定于定义在它上的 Lie 积(5.1.15)的结构常数 c_{ij}^k，不同的 c_{ij}^k 就得到不同的 Lie 积. 这些结构常数当然还应满足(5.1.16)和(5.1.17)两式. 这里我们先研究一、二维 Lie 代数的分类.

对于一维情形，只有一个基向量 $\boldsymbol{\alpha}$，而且其乘积$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=\boldsymbol{0}$.

对于二维情形，有两个线性无关的基向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，它们可能有两种情形：

(1) 一种是所有的 Lie 积都是 $\boldsymbol{0}$，即$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{0}$;

(2) 如果 Lie 积不全为 $\boldsymbol{0}$，则有$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}$. 无妨假定 $b\neq 0$，且令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{b}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{a}{b}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 为新的基向量，则有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2]=\boldsymbol{0},\quad[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=\boldsymbol{\alpha}_2.$$

这就是二维情形下全部的 Lie 代数，即只有以上两种.

例 3 三维 Lie 代数的分类.

对于三维情形，我们先来研究结构常数 c_{ij}^k 应该具有的性质. 由于在三维情形下 c_{ij}^k 有 27 个常数，考虑到 i,j 的反对称性(5.1.16)式，共有 9 个常数，因此我们假设

$$c_{ij}^k=\varepsilon_{ijl}b^{lk}+\delta_j^k a_i-\delta_i^k a_j.\tag{5.2.5}$$

将上式代入(5.1.17)式,得到

$$b^{ij}a_j = 0. \tag{5.2.6}$$

这表示向量(a_i)要么是零向量,要么是矩阵(b^{ij})的零特征值所对应的特征向量.通过变换把(b^{ij})化为对角形,即$b^{ij}=b^{(i)}\delta^{ij}$(不求和),其中$b^{(1)},b^{(2)},b^{(3)}$为特征值.于是可以设$(a_i)=(a,0,0)$,则$b^{(1)}$为零或$a$.这时,我们的基向量之间的关系可以写为

$$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2] = a\boldsymbol{e}_2 + b^{(3)}\boldsymbol{e}_3,$$
$$[\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3] = b^{(1)}\boldsymbol{e}_1,$$
$$[\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1] = b^{(2)}\boldsymbol{e}_2 - a\boldsymbol{e}_3.$$

考虑a与$b^{(i)}$的各种不同的可能情况,三维 Lie 代数可以有如下的分类(见文献[6]):

类型	a	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$
Ⅰ	0	0	0	0
Ⅱ	0	1	0	0
Ⅲ	1	0	1	−1
Ⅳ	1	0	0	1
Ⅴ	1	0	0	0
Ⅵ₀	0	1	−1	0
Ⅵ	a	0	1	−1
Ⅶ₀	0	1	1	0
Ⅶ	a	0	1	1
Ⅷ	0	1	1	−1
Ⅸ	0	1	1	1

其中第Ⅰ种类型对应于平移群,而第Ⅸ类型对应于$\mathscr{SO}(3)$.

二、单参数 Lie 群

在第四章§4.4中我们讨论了单参数 Lie 群.对给定的一个向量场,可以得到一族自洽的微分方程(4.4.2),它在适当的初条件下的解可以看做一个在初条件$\boldsymbol{x}_0$邻域的变换(4.4.4).根据本章的

讨论，这个变换也可以看做一个 Lie 群，又由于变换是由一个参数 t 决定，所以也称为**单参数 Lie 群**.

我们既然在 Lie 群 $\mathscr{G}$ 上引进了左不变向量场 $\boldsymbol{\xi}$，便可以在初条件 e 下，确定一条曲线 γ，即令积分曲线 γ 过 e 来确定，从而确定一个单参数 Lie 群. 把这个单参数 Lie 群记为 $\boldsymbol{g}(t)$，易知

$$\boldsymbol{F}_t\boldsymbol{g}(s) = \boldsymbol{g}(t+s), \tag{5.2.7}$$

其中 $\boldsymbol{F}_t$ 是对应于 $\boldsymbol{g}(t)$ 的映射. 另外，γ 的切向量为 $\boldsymbol{\xi}$，并且 $\gamma(0)=e$. 显然，单参数 Lie 群 $\boldsymbol{g}(t)$ 在一般情形下也是 Lie 群 $\mathscr{G}$ 的一维子群.

我们既然把左不变向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 与过点 e 的 $\mathscr{G}$ 的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 之间建立了一一对应，那么从向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 出发，我们也可以建立一个更为简单的过点 e 的积分曲线. 这条曲线和刚才得到的 γ 是一一对应的，记为 $\tilde{\gamma}$. 我们令单参数 Lie 群为

$$y^i = f^i(\boldsymbol{g}(s); x^1, x^2, \cdots, x^n), \tag{5.2.8}$$

则沿 $\gamma(t)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\xi^j(\boldsymbol{x}) = \xi^i(\boldsymbol{e}). \tag{5.2.9}$$

现在考虑曲线 $\tilde{\gamma}(t)$ 满足方程：

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}^i}{\mathrm{d}t} = \xi^i(\boldsymbol{e}) = \alpha^i\tilde{y}^i(\boldsymbol{e}) \quad (\text{对 } i \text{ 不求和}). \tag{5.2.10}$$

显然在同一初条件下它有解

$$\tilde{\gamma}: \tilde{y}^i(t) = \exp(\alpha^i t), \tag{5.2.11}$$

且该解满足：

$$\tilde{y}^i(t)\tilde{y}^i(s) = \tilde{y}^i(t+s). \tag{5.2.12}$$

这一把 γ 与 $\tilde{\gamma}$ 建立对应的映射称为指数映射. 这是因为在点 e 的邻域内近似地有

$$\tilde{\gamma} = \exp(\gamma t). \tag{5.2.13}$$

例 4 若对 $\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$ 来讨论，令 $\boldsymbol{X}\in\mathscr{GL}(n,\mathbb{R})$，而 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是对应的单参数子群，则

$$\exp(t\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\varphi}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(t\boldsymbol{X})^i. \qquad (5.2.14)$$

故有

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{X}, \quad \text{当 } t = 0 \text{ 时}, \boldsymbol{\varphi}(0) = \boldsymbol{I}.$$

例 5 若对三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中绕 z 轴的旋转变换为

$$\boldsymbol{\gamma}_3(t) = \exp(t\boldsymbol{X}_3) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (5.2.15)$$

则对应的在原点的切向量为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{X}_3 = \left.\frac{d\boldsymbol{\gamma}_3(t)}{dt}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (5.2.16)$$

三、Taylor 展式

由于我们整个理论是在 Lie 群 $\mathscr{G}$ 的原点 $\boldsymbol{e}$ 的邻域内讨论的，所以前面讨论的全部理论都可以用点 $\boldsymbol{e}$ 邻域的 Taylor 展式来得到.

对于 Lie 群核来说，令

$$z^k = f^k(x^1, x^2, \cdots, x^n; y^1, y^2, \cdots, y^n), \qquad (5.2.17)$$

将上式展为 Taylor 展式，可写为

$$z^k = x^k + y^k + b^k_{ij}x^i y^j + (\text{三次以上的项}). \qquad (5.2.18)$$

它显然满足 §5.1 中对 Lie 群核的四条要求.

在(5.2.18)式中，若令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}$，$y^i = y^i(t)$ 表示一条 Lie 群上的曲线，则这条曲线在左移动 L_g 下变到：

$$z^k(t) = g^k + y^i(t) + \cdots. \qquad (5.2.19)$$

在这个式子中，令 $y^i(t)$ 在点 $\boldsymbol{e}$ 的切向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则有

$$\left.\frac{dz^k}{dt}\right|_{t=0} = \alpha^k. \qquad (5.2.20)$$

这就是向量空间 $\mathscr{T}_e(\mathscr{G})$ 的向量.

若令

$$\begin{cases} x^i(t) = \alpha^i t + \cdots, \\ y^i(t) = \beta^i t + \cdots, \end{cases} \tag{5.2.21}$$

则
$$z^i(t)=(\alpha^i+\beta^i)t+b^i_{jk}\alpha^j\beta^k t^2+\cdots.$$

再令

$$\tilde{z}^i(t) = f^i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = (\alpha^i+\beta^i)t + b^k_{ji}\alpha^i\beta^j t^2 + \cdots,$$

于是有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^i &= \left.\frac{\mathrm{d}[z^i(t)-\tilde{z}^i(t)]}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}[f^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-f^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{z}(t)\circ\boldsymbol{z}^{-1}(t)]^i}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = (b^i_{jk}-b^i_{kj})\alpha^j\beta^k.\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

记

$$b^i_{jk} - b^i_{kj} = c^i_{jk}, \tag{5.2.23}$$

则(5.2.22)式变为

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^i = c^i_{jk}\alpha^j\beta^k. \tag{5.2.24}$$

由(5.2.23)式和(5.2.24)式还可以验证关于 c^k_{ij} 的 Jacobi 恒等式.

现在我们对 Lie 群来讨论. 令在 § 5.1 中讨论的 Lie 群 $\mathscr{G}$ 为

$$y^i = \varphi^i(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}), \tag{5.2.25}$$

式中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为流形 $\mathscr{M}$ 上的两点,而向量 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{G}$,则对于 $\mathscr{G}$ 上的一条曲线,可表示为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}(t)\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) + \cdots = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})t + \cdots, \tag{5.2.26}$$

这里

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) = \left.\left(\frac{\partial\varphi^i(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})}{\partial a^j}\right)\right|_{a=e}. \tag{5.2.27}$$

向量

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) \tag{5.2.28}$$

是 $\mathscr{T}_x(\mathscr{G})$ 上的向量. 在这条轨道上,当 $t=0$ 时,$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$,并且

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}). \tag{5.2.29}$$

显然,(5.2.29)式的积分是单参数变换群.

在前面的讨论中我们反复说，给了一个 Lie 群，可以引出在它上面的 Lie 代数. 现在我们要反过来问：给了一个代数结构，即给了遵从(5.1.16)式和(5.1.17)式的 c_{ij}^k，能否找到一个 Lie 群，它的 Lie 代数的结构常数就是 c_{ij}^k 呢？这个问题称为 **Lie 第三定理的逆定理**. 回答是肯定的. 由于这个问题的证明有一定难度且较长，所以我们不去讨论它.

例 6 考虑平面上的运动群：

$$\begin{cases} y^1 = x^1\cos a_1 + x^2\sin a_1 + a_2, \\ y^2 = -x^1\sin a_1 + x^2\cos a_1 + a_3. \end{cases} \tag{5.2.30}$$

它是一个三参数的变换群. 令

$$a_i = \alpha_i t + \cdots,$$

则利用 Taylor 展式有

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x^2 & -x^1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.2.31}$$

可见，在 Lie 代数中有三个向量：$\boldsymbol{\xi}_1=(x^2,-x^1)$，$\boldsymbol{\xi}_2=(1,0)$，$\boldsymbol{\xi}_3=(0,1)$. 对应的 Lie 导数为

$$L_{\xi_1} = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2},\quad L_{\xi_2} = \frac{\partial}{\partial x^1},\quad L_{\xi_3} = \frac{\partial}{\partial x^2}, \tag{5.2.32}$$

它们对应的三个单参数变换群可以通过积分得到，其几何意义为：第一个为旋转变换，后两个为平移变换.

§5.3 Lie 群的同态和同构

一、代数系统的同态、同构和自同构

Lie 群的代数性质抽象为 Lie 代数成为一门独立的学科，它是研究 Lie 群的强有力的工具. 为了把 Lie 群讨论得深入一些，我们

介绍它的一些初步知识.

一个集合引进了代数运算，就构成了一个代数系统. 前面介绍的 Lie 群就是一个代数系统.

定义 5.5 设给了两个代数系统 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{T}$，其中 $\mathscr{S}$ 的元素记为 σ，而 $\mathscr{T}$ 的元素记为 τ. 在每一代数系统中均定义了运算"$*$"如下：在 $\mathscr{S}$ 中，$\sigma_1 * \sigma_2 = \sigma_3$；在 $\mathscr{T}$ 中，$\tau_1 * \tau_2 = \tau_3$. 如果在 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{T}$ 的元素之间给了一一对应的关系 $\rho(\sigma) = \tau$，并且 ρ 还保持运算的对应，即

$$\rho(\sigma_3) = \rho(\sigma_1 * \sigma_2) = \rho(\sigma_1) * \rho(\sigma_2) = \tau_1 * \tau_2 = \tau_3, \tag{5.3.1}$$

则称在 $\mathscr{S}, \mathscr{T}$ 之间建立了**同构对应**. 这时又称 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{T}$ 是**同构**的.

应当指出的是，在一个代数系统中可能建立了不止一种运算，例如加法和乘法等，这时要两个代数系统同构需要这个对应关系保持所有这些运算.

例 1 令 $\mathscr{S}$ 是实数集 $\mathbb{R}$，考虑 $\mathbb{R}$ 中的加法运算，而 $\mathscr{T}$ 是形如 $\boldsymbol{\tau}_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵集合，其中定义了矩阵乘法，$a \in \mathbb{R}$. 显然 $\boldsymbol{\tau}_a$ 与 $a \in \mathbb{R}$ 之间建立了一一对应，这个对应是同构对应. 因为按照矩阵乘法 $\boldsymbol{\tau}_a \boldsymbol{\tau}_b = \boldsymbol{\tau}_{a+b}$.

定义 5.6 如果在定义 5.5 中，$\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{T}$ 的元素之间不是一一对应，而可能是 $\mathscr{T}$ 中的多个元素和 $\mathscr{S}$ 中的一个元素建立了对应，则这种对应称为**同态对应**. 这时则称 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{T}$ 是**同态**的.

显然同构是同态的特殊情形.

例 2 令 $\mathscr{S}$ 是形如 $\boldsymbol{\sigma}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 的矩阵组成的集合，$\theta \in [0, 2\pi)$，而 $\mathscr{T}$ 是实数集 $\mathbb{R}$，则 $\mathscr{S}$ 中的矩阵乘法和 $\mathscr{T}$ 中的实数加法是同态的. 同时因为 $\mathscr{T}$ 中 $\theta + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_\theta$ 是对应的，显然这是一个同态对应.

作为同构的特别情形，当 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{T}$ 是无限的连续集合时，若同构对应还保持了连续性和可微性，则称这种同构对应为**同胚对应**. 显

然例 1 的同构对应是同胚的.

同构对应的另一种特别情形是当$\mathscr{S}$和$\mathscr{T}$就是同一集合，同构对应ρ是把同一集合的元素对应于另一元素，但保持运算，即：对于$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\tau_1,\tau_2,\tau_3\in\mathscr{S}$，$\rho(\sigma_i)=\tau_i(i=1,2,3)$，且有

$$\sigma_1 * \sigma_2 = \sigma_3, \quad \tau_1 * \tau_2 = \tau_3.$$

这时称为在$\mathscr{S}$上建立了**自同构**. 以 Lie 群$\mathscr{G}$为例，令$\boldsymbol{g}\in\mathscr{G}$为$\mathscr{G}$中的任一元素，则

$$\rho(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{g}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{g}^{-1}\in\mathscr{G}$$

就建立了$\mathscr{G}$上的一个自同构. 这是由于

$$\rho(\boldsymbol{\sigma}_1 * \boldsymbol{\sigma}_2) = \boldsymbol{g}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{g}^{-1} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{g}^{-1}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{g}^{-1} = \rho(\boldsymbol{\sigma}_1) * \rho(\boldsymbol{\sigma}_2).$$

定义 5.7 如果一个代数系统的元素和矩阵的元素之间建立了对应关系，而且代数系统的运算和矩阵的运算建立了同构对应关系，则这种同构提供了一个用矩阵表示代数系统的途径. 这种同构称为**代数系统的(矩阵)表示**.

现在我们研究的对象是群，研究它的表示方法称为表示论. 后面我们会简单地介绍 Lie 群和 Lie 代数的表示.

二、Lie 代数的矩阵表示

利用 Poisson 括弧[·,·]，我们可以把 Lie 代数的运算和矩阵建立对应关系. 这种同构对应称为 **Lie 代数的矩阵表示**.

令$\boldsymbol{e}_i(i=1,2,\cdots,n)$为 Lie 代数$\mathscr{g}$的基向量，则有

$$[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j] = c_{ij}^k\boldsymbol{e}_k. \tag{5.3.2}$$

可以把上式看为$\boldsymbol{e}_i$作用在$\boldsymbol{e}_j$上的算子，记为$\mathrm{adj}\boldsymbol{e}_i$，则上式可以改写为

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j) = c_{ij}^k\boldsymbol{e}_k.$$

于是任何一个$\mathscr{g}$中的向量$\boldsymbol{\alpha}=a^i\boldsymbol{e}_i$可以表示为

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{e}_j) = a^ic_{ij}^k\boldsymbol{e}_k = m_j^k\boldsymbol{e}_k. \tag{5.3.3}$$

这样对于向量$\boldsymbol{e}_j$，我们得到一个矩阵$\boldsymbol{M}=(m_j^k)$来表示任一向量$\boldsymbol{\alpha}$对它的作用.

由 Jacobi 恒等式，显然有

$$\mathrm{adj}[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}] = \mathrm{adj}\boldsymbol{\alpha}\ \mathrm{adj}\boldsymbol{\beta} - \mathrm{adj}\boldsymbol{\beta}\ \mathrm{adj}\boldsymbol{\alpha}. \tag{5.3.4}$$

其实，只要对 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{e}_j$ 直接利用 Jacobi 恒等式验证上式即可.

例 3 在§5.2 的例题中我们讨论了平面上平移和转动三个向量，它们组成了一个 Lie 代数. 若记 $\boldsymbol{e}_1=(1,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1),\boldsymbol{e}_3=(-y,x)$，可以直接计算这些向量的 Poisson 括弧：

$$[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]=\boldsymbol{0},\quad [\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3]=\boldsymbol{e}_2,\quad [\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]=-\boldsymbol{e}_1.$$

利用 $[\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j]=c_{ij}^k\boldsymbol{e}_k$，把它和上式对照可以直接得到 c_{ij}^k：

$$c_{12}^k=0,\quad c_{13}^1=c_{13}^3=0,\quad c_{13}^2=1,\quad c_{23}^2=c_{23}^3=0,\quad c_{23}^1=-1,$$

其余下标具有反对称性. 利用(5.3.3)式，我们有

$$\mathrm{adj}\ \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记为}}\boldsymbol{E}_1,\quad \mathrm{adj}\ \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记为}}\boldsymbol{E}_2,$$

$$\mathrm{adj}\ \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记为}}\boldsymbol{E}_3.$$

它们之间显然有

$$[\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2]=\boldsymbol{O},\quad [\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_3]=\boldsymbol{E}_2,\quad [\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3]=-\boldsymbol{E}_1,$$

这里的矩阵乘法采用(5.1.13)式所定义矩阵 Lie 代数乘法.

§5.4 不 变 量

一、不变量的定义

在几何学和物理学中，对于不变量的研究占有中心的位置. 现在我们要讨论不变量的一般提法.

定义 5.8 一个函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 Lie 变换群 $\varphi(\boldsymbol{g},\boldsymbol{x})$ 作用下称为**不变量**，如果有

$$f(\boldsymbol{x})=f(\varphi(\boldsymbol{g},\boldsymbol{x})). \tag{5.4.1}$$

这个定义说明不变量在任何单参数群上保持为常量.

我们曾经说过主要讨论局部理论,因而这里只讨论点 y 在点 x 的邻域内的情形. 满足这种条件的 Lie 变换群我们称为**局部传递变换群**. 若有一个 Lie 变换群对 x 来说是局部传递的,则它过点 x 的轨线的切向量存在. 由于切向量场的 Lie 导数作用在这个切向量场上的第一积分时总是为零的(第四章 §4.4),因此,在局部传递变换群的条件下,总存在不为常数的不变量.

事实上,令 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ 是 §5.2 中定义的变换群 $\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{g},\boldsymbol{x})$ 对应的由式(5.2.27)定义的矩阵,r 是它的行向量数,并令 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 是由 $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})$ 的极大线性无关行向量组成的矩阵,其行数为 $r'(\leqslant r)$. 对于函数 $f(\boldsymbol{x})$,记 $\boldsymbol{u}=\mathbf{grad}f$,我们说 f 是不变量的充分必要条件是:

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \tag{5.4.2}$$

对于 $r'\geqslant n$ 时,上式只有唯一解,即 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$,也即只有平凡的不变量. 为了得到非平凡的不变量,只要降低 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 的维数,比如说从中去掉若干行向量,即可得到 $\boldsymbol{u}$ 的非平凡解,从而积分得到 $f(\boldsymbol{x})$,这时 $f(\boldsymbol{x})$ 沿某个子变换群是不变量.

另一种得到非平凡的不变量的办法是推广变换群的作用范围到

$$\underbrace{\mathbb{R}^n\otimes\mathbb{R}^n\otimes\cdots\otimes\mathbb{R}^n}_{k\text{个}}$$

上去,令

$$\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k) = (\varphi(\boldsymbol{g},\boldsymbol{x}^1),\varphi(\boldsymbol{g},\boldsymbol{x}^2),\cdots,\varphi(\boldsymbol{g},\boldsymbol{x}^k)), \tag{5.4.3}$$

这里 $\boldsymbol{x}^k(i=1,2,\cdots,k)$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量. 令

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,\cdots,\boldsymbol{x}^k)\in\mathbb{R}^{nk},$$

这时我们得到一个 nk 维空间中的变换. 它的 Lie 导数

$$\boldsymbol{V}^{(k)}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}^1),\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}^2),\cdots,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}^k)] \tag{5.4.4}$$

在这个矩阵中 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$ 出现了 k 次,只是变量不同. 我们将 $\boldsymbol{V}^{(k)}(\boldsymbol{x})$ 作

用在延伸了的梯度算子

$$\mathbf{grad}^{(k)} f = (\mathbf{grad}_{x^1} f, \mathbf{grad}_{x^2} f, \cdots, \mathbf{grad}_{x^k} f)$$

上，即：将每一个 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}^i)$ 作用在梯度算子 $\mathbf{grad}_{x^i} f$ 上，由于 $\boldsymbol{V}^{(k)}(\boldsymbol{x})$ 的秩为 r'，并且因为 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}^i)$ 是线性无关的，因而得到

$$\boldsymbol{V}^{(k)}(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^k)\mathbf{grad}^{(k)} f = \mathbf{0}. \tag{5.4.5}$$

这时，$\boldsymbol{u}$ 必然有非零解.

定义 5.9 一个变换群 $\varphi(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{x})$ 的 k **点不变量**是一个在 $\varphi(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{x})$ 作用下不变的可微的多元函数 $f(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^k)$.

当 $k \geqslant \min\{n, r'\}$ 时，上面的讨论说明了总存在 k 点不变量.

例 1 对于平面上的运动群(5.2.30)，有

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}), \quad r = r' = 3, n = 2.$$

令 $k=2$，于是 $\boldsymbol{V}^{(2)}$ 的秩为 3，它作用在四维($nk=4$)空间上，得 1 个自由度，故可得到一个两点不变量. 具体求法如下：

$$\boldsymbol{V}^{(2)}\mathbf{grad}^{(2)} f = \begin{pmatrix} y^1 & -x^1 & y^2 & -x^2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x^1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y^1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.4.6}$$

即

$$\begin{cases} y^1 \dfrac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 \dfrac{\partial f}{\partial y^1} + y^2 \dfrac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \dfrac{\partial f}{\partial y^2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^1} + \dfrac{\partial f}{\partial x^2} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y^1} + \dfrac{\partial f}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \tag{5.4.7}$$

(5.4.7)中的后两式表明 f 是 $u = x^1 - x^2$ 和 $v = y^1 - y^2$ 的函数，代

入第一式得

$$vf_u - uf_v = 0.$$

这个方程的第一积分是 $f(u,v)=\text{const}$ ，即

$$f_u \mathrm{d}u + f_v \mathrm{d}v = 0.$$

最后由此上两式得 $u^2+v^2=\text{const}$ ，即有

$$f(u,v) = (x^1 - x^2)^2 + (y^1 - y^2)^2. \tag{5.4.8}$$

这就是运动群(5.2.30)所允许的两点不变量，这也就是说在变换(5.2.30)下任两点的距离不变.

在二维欧氏空间中就只有一个独立的不变量，另外的不变量都不独立.

在几何中研究在变换之下，特别在坐标变换之下不变的性质，这一观点是德国数学家 Kleine 于 1872 年提出的，称为“Erlangen 纲领”①，它是将群论的观点推广到几何学分类的纲领.

二、微分不变量

前面的讨论引进了不变量的概念，并引进了 k 点不变量及其求解方法，这些都是十分重要的. 不过，在求解不变量时，还有些缺陷. 这些计算不变量的方法依赖于求首次积分，一般说来这是比较麻烦的. 而下面我们要讨论的方法仅仅需要微分运算就可以了. 它是由 S. Lie 开创并由 E. Cartan 等人发展起来的.

1. 单变量微分不变量

n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一条曲线是由映射 $f: \mathscr{I} \to \mathbb{R}^n$ 组成，其中 $\mathscr{I} \subset \mathbb{R}$ ，向量函数 f 可微. 为了方便，我们将参数 $\tau \in \mathscr{I}$ 记做 x^1 ，这在某一点的邻域内总是能够办到的.

设给定 $\mathbb{R}^n$ 中的向量场 ξ，由这个向量场确定了一个单参数变换群，关于这个向量场的 Lie 导数是

① 指德国数学家 F. Kleine(1849—1925)于 1872 年在 Erlangen 大学评议会上提交的论文：A Comparative Review of Researches in Geometry(原文为德文).

$$L_{\xi}^{(0)}=\sum_{i=1}^{n}\xi^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}. \tag{5.4.9}$$

对于任意的函数 $\psi\left(x^{1},\cdots,x^{n},\frac{\mathrm{d}x^{2}}{\mathrm{d}x^{1}},\cdots,\frac{\mathrm{d}x^{n}}{\mathrm{d}x^{1}}\right)$，我们为了讨论其 Lie 导数，引进新的变量

$$x_{i}'=\frac{\mathrm{d}x^{i}}{\mathrm{d}x^{1}}\quad(i=2,\cdots,n). \tag{5.4.10}$$

于是该函数可以记为一个 $2n-1$ 元函数 $\psi(x^{1},\cdots,x^{n},x_{2}',\cdots,x_{n}')$.

定义函数 ψ 在新变量下的 Lie 导数为

$$L^{(1)}\psi=\left(\sum_{j=1}^{n}\xi^{j}\frac{\partial}{\partial x^{j}}+\sum_{i=2}^{n}\eta^{i}\frac{\partial}{\partial x_{i}'}\right)\psi, \tag{5.4.11}$$

其中 η^{i} 定义为

$$\eta^{i}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}F_{t}^{i}(x^{1},x^{2}(x^{1}),\cdots,x^{n}(x^{1}))}{\mathrm{d}F_{t}^{1}}\Bigg|_{t=0}, \tag{5.4.12}$$

在这里 x^{1} 看为参量. 上述这些分量 η^{i} 是我们在扩展变量之后，相应的向量场 ξ 分量的扩展.

为了从 ξ 来计算 η^{i}，我们这里采用更为方便的观点来讨论这一问题. 在 $2n-1$ 维向量空间中，引进和(5.4.10)式相应的关系. 由于

$$\mathrm{d}x^{j}-x_{j}'\mathrm{d}x^{1}=0\quad(j=2,\cdots,n), \tag{5.4.13}$$

若将上述微分算子 d 扩展为 $2n-1$ 维向量空间中的全微分算子 D，并将算子 $L^{(1)}$ 作用在(5.4.13)式的两端，利用二阶微分可交换性质

$$\mathrm{D}L^{(1)}=L^{(1)}\mathrm{D}, \tag{5.4.14}$$

我们可由下式来计算 η^{j}：

$$\begin{aligned}L^{(1)}(\mathrm{D}x^{j}-x_{j}'\mathrm{D}x^{1})&=\mathrm{D}L^{(1)}x^{j}-(L^{(1)}x_{j}')\mathrm{D}x^{1}-x_{j}'\mathrm{D}L^{(1)}x^{1}\\&=\mathrm{D}\xi^{j}-\eta^{j}\mathrm{D}x^{1}-x_{j}'\mathrm{D}\xi^{1}=0.\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

上式的最后一个等号反解出来就是 η^{j} 的计算公式：

$$\eta^{j}=\frac{\mathrm{D}\xi^{j}}{\mathrm{D}x^{1}}-x_{j}'\frac{\mathrm{D}\xi^{1}}{\mathrm{D}x^{1}}. \tag{5.4.16}$$

2. 高阶微分不变量

引进二阶微分的变量 $x''_i=\dfrac{\mathrm{d}^2x^i}{(\mathrm{d}x^1)^2}$ $(i=2,\cdots,n)$，我们将函数的变量进一步加以扩展，考虑 $3n-2$ 个变量的函数

$$\psi(x^1,\cdots,x^n,x'_2,\cdots,x'_n,x''_2,\cdots,x''_n). \tag{5.4.17}$$

在扩展变量下函数 ψ 的 Lie 导数定义为

$$L^{(2)}\psi=\left(\sum_{j=1}^n\xi^j\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{i=2}^n\eta^i\frac{\partial}{\partial x'_i}+\sum_{i=2}^n\zeta^i\frac{\partial}{\partial x''_i}\right)\psi. \tag{5.4.18}$$

为了计算上述 Lie 导数，我们需要计算扩展变量后对应的向量场，也就是计算相应于这 $n-1$ 个新变量 x''_i 的向量场的分量 ζ^i. 为此我们同样考虑

$$\mathrm{d}x'_j-x''_j\mathrm{d}x'=0\quad(j=2,\cdots,n). \tag{5.4.19}$$

采用类似于(5.4.15)式的方法，我们有

$$\begin{aligned}L^{(2)}(\mathrm{D}x'_j-x''_j\mathrm{D}x^1)&=\mathrm{D}L^{(2)}x'_j-(L^{(2)}x''_j)\mathrm{D}x^1-x''_j\mathrm{D}L^{(2)}x^1\\&=\mathrm{D}\eta^j-\zeta^j\mathrm{D}x^1-x''_j\mathrm{D}\xi^1=0,\end{aligned} \tag{5.4.20}$$

特别的是这里的 D 是 $3n-2$ 维的全微分算子. 因此，我们有

$$\zeta^j=\frac{\mathrm{D}\eta^j}{\mathrm{D}x^1}-x''_j\frac{\mathrm{D}\xi^1}{\mathrm{D}x^1}. \tag{5.4.21}$$

3. 多变量微分不变量

现在设我们有带多变量偏导数的函数，例如我们有

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,p,q,r,s,t), \tag{5.4.22}$$

式中 $p=\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1}$, $q=\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2}$, $r=\dfrac{\partial^2x_3}{\partial x_1^2}$, $s=\dfrac{\partial^2x_3}{\partial x_1\partial x_2}$, $t=\dfrac{\partial^2x_3}{\partial x_2^2}$. 由于我们是在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面 $x_3=x_3(x_1,x_2)$ 上进行讨论的，这时对 φ 的 Lie 导数为

$$L^{(*)}=\xi^1\frac{\partial}{\partial x_1}+\xi^2\frac{\partial}{\partial x_2}+\xi^3\frac{\partial}{\partial x_3}+\pi\frac{\partial}{\partial p}+\theta\frac{\partial}{\partial q}+\rho\frac{\partial}{\partial r}+\sigma\frac{\partial}{\partial s}+\tau\frac{\partial}{\partial t}. \tag{5.4.23}$$

类似于(5.4.13)式和(5.4.19)式，我们有

$$dx_3 = p\,dx_1 + q\,dx_2,\quad dp = r\,dx_1 + s\,dx_2,\quad dq = s\,dx_1 + t\,dx_2. \tag{5.4.24}$$

利用与单变量微分不变量类似的方法，我们可以通过给定的相应于(x_1,x_2,x_3)的变换的向量场(ξ^1,ξ^2,ξ^3)，来确定扩展的向量场的其余分量. 由于

$$\begin{aligned}
&L^{(*)}(Dx_3 - pDx_1 - qDx_2)\\
&\quad = DL^{(*)}x_3 - (L^{(*)}p)Dx_1 - pDL^{(*)}x_1 - (L^{(*)}q)Dx_2 - qDL^{(*)}x_2\\
&\quad = D\xi^3 - \pi Dx_1 - pD\xi^1 - \theta Dx_2 - qD\xi^2 = 0,
\end{aligned} \tag{5.4.25}$$

因而我们有

$$\begin{cases}
\pi = \dfrac{\partial \xi^3}{\partial x_1} - p\dfrac{\partial \xi^1}{\partial x_1} - q\dfrac{\partial \xi^2}{\partial x_1},\\[2ex]
\theta = \dfrac{\partial \xi^3}{\partial x_2} - p\dfrac{\partial \xi^1}{\partial x_2} - q\dfrac{\partial \xi^2}{\partial x_2}.
\end{cases} \tag{5.4.26}$$

同理，由于

$$\begin{cases}
L^{(*)}(Dp - rDx_1 - sDx_2) = D\pi - \rho Dx_1 - rD\xi^1 - \sigma Dx_2 - sD\xi^2 = 0,\\
L^{(*)}(Dq - sDx_1 - tDx_2) = D\theta - \sigma Dx_1 - sD\xi^1 - \tau Dx_2 - tD\xi^2 = 0,
\end{cases} \tag{5.4.27}$$

因而我们有

$$\begin{cases}
\rho = \dfrac{\partial \pi}{\partial x_1} - r\dfrac{\partial \xi^1}{\partial x_1} - s\dfrac{\partial \xi^2}{\partial x_1},\\[2ex]
\sigma = \dfrac{\partial \pi}{\partial x_2} - r\dfrac{\partial \xi^1}{\partial x_2} - s\dfrac{\partial \xi^2}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \theta}{\partial x_1} - s\dfrac{\partial \xi^1}{\partial x_1} - t\dfrac{\partial \xi^2}{\partial x_1},\\[2ex]
\tau = \dfrac{\partial \theta}{\partial x_2} - s\dfrac{\partial \xi^1}{\partial x_2} - t\dfrac{\partial \xi^2}{\partial x_2},
\end{cases} \tag{5.4.28}$$

其中 σ 的第二个等式是因为(5.4.26)式成立.

在一般情形下，对于变量 $x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots,x_{n+m}$，其中后 m 个变量是前 n 个变量的函数，令 $p_{ki}=\dfrac{\partial x_k}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n;k=n+1,\cdots,$

$n+m$)，引进变量代换

$$\mathrm{d}x_k - \sum_{i=1}^{n} p_{ki}\,\mathrm{d}x_i = 0, \tag{5.4.29}$$

这里 $k=n+1,\cdots,n+m$. 这个变换称为**接触变换**. 通过这个方法，一个变换群可以扩展为**接触变换群**. 这时相应的微分算子矩阵 $\mathbf{V}(\boldsymbol{x})$将要扩展为 $\mathbf{V}^{(k)}(\boldsymbol{x})$，它依赖于 k 阶导数，空间的维数可以随 k 无限增加. 这样，对于任何变换群都可以得到微分不变量.

例 2　继续考虑$\mathbb{R}^2$中的运动群(5.2.30)，讨论平面上的曲线. 这时 $n=2,r=r'=3$，扩展到 $k=2$. 由(5.4.16)式我们有

$$\xi^3 = \eta^2 = \frac{\mathrm{D}\xi^2}{\mathrm{D}x_1} - x_2' \frac{\mathrm{D}\xi^1}{\mathrm{D}x_1},$$

但由于$\dfrac{\mathrm{D}\xi^i}{\mathrm{D}x_1}=\dfrac{\partial\xi^i}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\xi^i}{\partial x_2}x_2'$，所以

$$\xi^3 = \eta^2 = \frac{\partial\xi^2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial\xi^2}{\partial x_2} - \frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)x_2' - \frac{\partial\xi^1}{\partial x_2}x_2'^2.$$

同理可得

$$\begin{aligned}\xi^4 &= \sigma^2 \\ &= \frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_1^2} + \left(2\frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_1^2}\right)x_2' + \left(\frac{\partial^2\xi^2}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_1\partial x_2}\right)x_1'^2 \\ &\quad - \frac{\partial^2\xi^1}{\partial x_2^2}x_2'^3 - \left(\frac{\partial\xi^2}{\partial x_2} - 2\frac{\partial\xi^1}{\partial x_1}\right)x_2'' - 3\frac{\partial\xi^1}{\partial x_2}x_2'x_2''.\end{aligned}$$

将平面上的旋转和平移群向量代入，可得相应的三个扩展行向量构成的矩阵为

$$\mathbf{V}^{(2)} = \begin{pmatrix} -x_2 & x_1 & 1+x_2'^2 & 3x_2'x_2'' & 3x_2''^2+4x_2'x_2''' \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.4.30}$$

其延伸的梯度算子为

$$\mathbf{grad}^{(2)} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2'}, \frac{\partial}{\partial x_2''}, \frac{\partial}{\partial x_2'''}\right\}. \tag{5.4.31}$$

于是二阶微分不变量是下述方程的解：

$$\begin{cases} -x_2\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+x_1\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+(1+x_2'^2)\dfrac{\partial f}{\partial x_2'}+3x_2'x_2''\dfrac{\partial f}{\partial x_2''}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=0. \end{cases} \tag{5.4.32}$$

将后两方程代入第一个方程，可化简为

$$(1+x_2'^2)\frac{\partial f}{\partial x_2'}+3x_2'x_2''\frac{\partial f}{\partial x_2''}=0.$$

这个方程等价于特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x_2'}{1+x_2'^2}=\frac{\mathrm{d}x_2''}{3x_2'x_2''}. \tag{5.4.33}$$

由这个式子可以看出 $x_2''=0$ 是一个微分不变量，它代表直线，即直线是变换下的不变性质.

当 $x_2''\neq 0$ 时，由(5.4.33)式可以积分得

$$f^{(2)}=\frac{x_2''}{(1+x_2'^2)^{3/2}}=\text{const}, \tag{5.4.34}$$

即曲率为常数. 这说明曲率是变换(5.2.30)下的不变性质.

作为练习请读者验证：

$$f^{(3)}=\frac{(1+x_2'^2)x_2'''-3x_2'x_2''^2}{(1+x_2'^2)^3}=\text{const} \tag{5.4.35}$$

是另一个微分不变量，而且平面运动群也只有这两个微分不变量. 实际上 $\kappa=f^{(2)}$ 是曲率，$f^{(3)}=\dfrac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}s}$，这里 $\mathrm{d}s=\dfrac{\mathrm{d}f^{(2)}}{f^{(3)}}$ 为弧长微分.

上面由 S. Lie 发展的这个思想，在求解非线性微分方程中得到重要的应用. 从另一个角度看，对于给定的微分方程，可以看做一个扩展的函数，如(5.4.17)或(5.4.22)式，若我们找到了它在扩展流形上的向量场(5.4.18)或(5.4.23)式，则可以在两组扩展变量

之间建立微分关系式. 由于在两组变量下，扩展的函数是不变的，所以，若给出了方程的一组解，我们可以通过该微分关系式得到方程的另一个解. 因此上述方法成为求解微分方程的一个有力的工具. 我们在第二章中讨论的 Bäcklund 变换就是一个著名的这种变换. 在本章 §5.5 中我们将专门介绍这种变换.

三、Killing 向量场

前面我们讨论了对于整个 Lie 群 $\mathscr{G}$ 上的标量不变量. 对于单参数变换群的不变量，我们知道它相当于这个群的切向量场上的 Lie 导数为零的向量. 在第四章我们曾经讨论过任一张量的 Lie 导数，因而也可以定义相应的在单参数变换群下的张量不变量，即在相应的向量场上 Lie 导数为零的向量.

作为一个重要的例子，让我们引进 Killing 向量场的概念.

定义 5.10　一个 **Killing 向量场**定义为一个向量场 $\boldsymbol{\xi}$，这个向量场使流形的度量张量的 Lie 导数为零，即

$$L_{\xi}g_{ij}=\xi^{s}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{s}}+g_{kj}\frac{\partial\xi^{k}}{\partial x^{i}}+g_{ik}\frac{\partial\xi^{k}}{\partial x^{i}}=0.$$

回顾上一章 §4.4 中的(4.4.15)式，Killing 向量场就是使得变形张量 $\varepsilon_{ij}=0$ 所对应的位移场.

作为例子，让我们考虑三维欧氏空间 $\mathscr{E}^3$ 中直角坐标系下的 Killing 向量场. 其度量张量的分量为 δ_{ij}. 这时 $\boldsymbol{\xi}_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 就是 Killing 向量，以下三个也是 Killing 向量：

$$\boldsymbol{\eta}_1=x^2\frac{\partial}{\partial x^3}-x^3\frac{\partial}{\partial x^2},$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=x^3\frac{\partial}{\partial x^1}-x^1\frac{\partial}{\partial x^3},$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=x^1\frac{\partial}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial}{\partial x^1}.\tag{5.4.36}$$

这里前三个向量 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是平移，而后三个向量 $\boldsymbol{\eta}_i$ 是转动. 还应指出，通常的 Laplace 算子是

$$\Delta^2 = L_{\xi_1} L_{\xi_1} + L_{\xi_2} L_{\xi_2} + L_{\xi_3} L_{\xi_3}. \tag{5.4.37}$$

其 Killing 向量场就相应于我们以前几次遇到的流形的等度量变换的位移向量场.

在球坐标 (r,θ,φ) 中，$g_{rr}=1$，$g_{\theta\theta}=r^2$，$g_{\varphi\varphi}=r^2\sin^2\theta$，其他度量张量的分量为零. 很显然，$\frac{\partial}{\partial\varphi}$ 是 Killing 向量. 在球坐标中的其他五个 Killing 向量表达式稍复杂一点，这里略去不进一步讨论.

四、积分不变量

现在我们给出积分不变量的定义.

定义 5.11 令 $\mathscr{M}$ 是一流形，$\boldsymbol{\xi}$ 是定义在 $\mathscr{M}$ 上面的向量场. 称 p 次微分形式 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的**不变 p 次形**，如果 $L_{\xi}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 在向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 的 Lie 导数恒为零.

定义中用到了微分形式的 Lie 导数. 我们在第四章已经介绍过微分形式，但对于一个微分形式的 Lie 导数我们还没有讨论过. 其实原则上它并不是新的，因为微分形式可以看做反对称张量，而对张量的 Lie 导数是定义了的. 不过为方便起见，我们把它具体计算公式写下来. 对任意 p 次微分形式 $\boldsymbol{\omega}$，我们有

$$L_{\xi}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{p!}\left(\xi^k\partial_k\omega_{i_1\cdots i_p} + p\omega_{ki_2\cdots i_p}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^{i_1}}\right)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_p}. \tag{5.4.38}$$

有了 p 次微分形式是不变的概念便可以定义积分不变量.

定义 5.12 设 $\boldsymbol{F}_t$ 是相应于向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 的单参数 Lie 变换群，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 p 次微分形式. 称积分 $\int_{\mathscr{D}}\boldsymbol{\alpha}$ 是在 $\boldsymbol{F}_t$ 作用下的**不变积分**，如果

$$\int_{\mathscr{D}}\boldsymbol{F}_t^*\boldsymbol{\alpha} = \int_{\mathscr{D}}\boldsymbol{\alpha}, \tag{5.4.39}$$

这里 $\mathscr{D}$ 是定向的有边界的 p 维子流形上的区域.

我们看到,若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是不变 p 次形,则 $\int_{\mathscr{D}}\boldsymbol{\alpha}$ 也是不变积分,即积分不变量.实际上我们有如下的定理:

定理 5.2(Poincaré-Cartan 定理)　若对于任意的 p 维具有边界的定向流形 $\mathscr{D}$,定义了映射

$$\varphi:\ \mathscr{V}\to\mathscr{M},$$

且对于单参数变换群 $\boldsymbol{F}_t$ 有

$$\int_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{F}_t\cdot\varphi)^*\boldsymbol{\alpha}=\int_{\mathscr{D}}\varphi^*\boldsymbol{\alpha},\tag{5.4.40}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}$ 是不变 p 次形(相应地(5.4.40)也称为**不变量积分**).

实际上,由于被积的集合 $\mathscr{D}$ 是紧致的,在任何 $\mathscr{D}$ 上(5.4.40)式成立意味着被积表达式相等,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 是不变 p 次形.

例 3　令在 n 维欧氏空间 $\mathscr{E}^n$ 中无限小变换是速度向量 $\boldsymbol{v}=(v^1,v^2,\cdots,v^n)$ 所定义的变换 $\boldsymbol{\xi}$,求积分

$$A(t)=\int_{\Omega(t)}\rho(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

为守恒的条件,其中 $\Omega(t)\subset\mathscr{E}^n$.

解　直接计算知守恒条件为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t))\bigg|_{t=0}=\int_{\Omega(t)}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+L_{\xi}(\rho\mathrm{d}\boldsymbol{x})\right]=0.$$

但 $L_{\xi}(\rho\mathrm{d}\boldsymbol{x})=L_{\xi}\rho\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\rho L_{\xi}(\mathrm{d}\boldsymbol{x})$,考虑到由向量 $\boldsymbol{\xi}$ 诱导的变换 $\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}_t(\boldsymbol{x})$,上式后一项可以进行如下的计算:

$$\begin{aligned}L_{\xi}(\mathrm{d}\boldsymbol{x})&=L_{\xi}(\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{F}_t(\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n)]\bigg|_{t=0}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{F}_t}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}\right)\bigg|_{t=0}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{\partial\xi^i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.\end{aligned}$$

综合以上的讨论最后得在无限小变换 $\boldsymbol{\xi}$ 下,$A(t)$ 守恒的条件是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i}=0.$$

这就是连续性方程.

§5.5 Lie-Bäcklund 变换

一、Lie-Bäcklund 变换

我们在§5.4 介绍了给定变换群，怎样求在这个变换群作用下的微分不变量的问题. 现在我们要从另一个角度从更为一般的观点提出问题，即：给定了一个微分方程，能否找到一个变换，使得在该变换下所给的微分方程不变？显然这个问题的解决对于微分方程理论具有重要意义. 现在我们首先来引进 Lie-Bäcklund 变换群的概念.

设 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{u}=(u^1,\cdots,u^m)\in\mathbb{R}^m$，且令 $\boldsymbol{u}_s$ 为 $\boldsymbol{u}$ 的 s 阶偏导数，其分量的形式为 $u^\alpha_{i_1\cdots i_s}$ $(\alpha=1,\cdots,m;i_s=1,\cdots,n)$. 考虑这些变量之间的变换

$$\left.\begin{aligned}x'^i &= f^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,a),\\ u'^\alpha &= \varphi^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,a),\\ u_i'^\alpha &= \psi_i^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,a),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{5.5.1}$$

其中 a 为变换的参数.

它实际上定义了无限维空间之间的变换. 由(5.5.1)式，我们微分一次得

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}x'^i &= \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j+\frac{\partial f^i}{\partial u^\beta}\mathrm{d}u^\beta+\frac{\partial f^i}{\partial u_j^\beta}\mathrm{d}u_j^\beta+\cdots,\\ \mathrm{d}u'^\alpha &= \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j+\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta}\mathrm{d}u^\beta+\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u_j^\beta}\mathrm{d}u_j^\beta+\cdots,\\ \mathrm{d}u_i'^\alpha &= \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j+\frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial u^\beta}\mathrm{d}u^\beta+\frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial u_j^\beta}\mathrm{d}u_j^\beta+\cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{5.5.2}$$

定义 5.13 变换(5.5.1)称为是**切变换**，如果

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}u^\alpha - u_j^\alpha \mathrm{d}x^j = 0, \\ &\mathrm{d}u_i^\alpha - u_{ij}^\alpha \mathrm{d}x^j = 0, \\ &\mathrm{d}u_{i_1 i_2}^\alpha - u_{i_1 i_2 j}^\alpha \mathrm{d}x^j = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5.5.3}$$

为不变量(我们在§4.2中曾经把变换(5.5.3)称为接触变换).

对变换(5.5.3)采用更紧凑的记号：令

$$\mathrm{D}_i = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^i} + u_{ii_1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha} + u_{ii_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} + \cdots, \tag{5.5.4}$$

它作用在 $x^i, u^\alpha, u_i^\alpha, u_{ij}^\alpha, \cdots$ 上；令

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \cdots + \zeta_{i_1\cdots i_s}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_s}^\alpha} + \cdots, \tag{5.5.5}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} &\xi^i = \frac{\partial f^i}{\partial a}\bigg|_{a=0}, \quad \eta^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial a}\bigg|_{a=0}, \\ &\zeta_i^\alpha = \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial a} = \frac{\partial \eta}{\partial x^i}\xi^i + u_i^\beta \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial a^\beta}\bigg|_{a=0}, \\ &\zeta_{i_1\cdots i_s}^\alpha = \frac{\partial \psi_{i_1\cdots i_s}^\alpha}{\partial a}\bigg|_{a=0} \quad (s = 1,2,\cdots). \end{aligned}\right\} \tag{5.5.6}$$

设算子(5.5.5)完全地刻画了变换(5.5.1)的特点. 这只要保证 Lie-Bäcklund 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}a} = \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{F}), \\ \boldsymbol{F}\Big|_{a=0} = \boldsymbol{z} \end{cases} \tag{5.5.7}$$

有唯一解，其中

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{z} = (x^i, u^\alpha, u_i^\alpha, \cdots), \\ &\boldsymbol{F} = (f^i, \varphi^\alpha, \psi_i^\alpha, \cdots), \\ &\boldsymbol{\Xi} = (\xi^i, \eta^\alpha, \zeta_i^\alpha, \cdots). \end{aligned}\right\} \tag{5.5.8}$$

当方程(5.5.7)的解存在唯一时，则由唯一性定理可以直接得到变换(5.5.1)的群性质

$$F(F(z,a),b) = F(z,a+b). \tag{5.5.9}$$

把变换(5.5.1)与(5.5.2)联立可以得到扩展的群 $\mathscr{G}$,其算子为

$$\widetilde{X} = X + \tilde{\xi}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{\eta}^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \tilde{\zeta}_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \cdots, \tag{5.5.10}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\xi}^i &= \left.\frac{\partial x^i}{\partial a}\right|_{a=0}, \\ \tilde{\eta}^\alpha &= \left.\frac{\partial u'^\alpha}{\partial a}\right|_{a=0}, \\ \tilde{\zeta}_i^\alpha &= \left.\frac{\partial u_i'^\alpha}{\partial a}\right|_{a=0}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5.5.11}$$

而且由(5.5.2)式和(5.5.6)式我们有

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\xi}^i &= \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j + \frac{\partial \xi^i}{\partial u^\beta} \mathrm{d}u^\beta + \frac{\partial \xi^i}{\partial u_j^\beta} \mathrm{d}u_j^\beta + \cdots, \\ \tilde{\eta}^\alpha &= \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j + \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta} \mathrm{d}u^\beta + \frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u_j^\beta} \mathrm{d}u_j^\beta + \cdots, \\ \tilde{\zeta}_i^\alpha &= \frac{\partial \zeta_i^\alpha}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j + \frac{\partial \zeta_i^\alpha}{\partial u^\beta} \mathrm{d}u^\beta + \frac{\partial \zeta_i^\alpha}{\partial u_j} \mathrm{d}u_j^\beta + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5.5.12}$$

这时相应于(5.5.3)的条件是

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{X}(\mathrm{d}u^\alpha - u_j^\alpha \mathrm{d}x^j) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\widetilde{X}(\mathrm{d}u_{i_1\cdots i_s}^\alpha) - u_{i_1\cdots i_s}^\alpha \mathrm{d}x^j = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{5.5.13}$$

即算子 $\widetilde{X}$ 作用下(5.5.3)不变.到现在为止,独立的微分变量只剩下 $\mathrm{d}x^1,\cdots,\mathrm{d}x^n$.综上讨论,我们有定理:

定理 5.3 若(5.5.1)为 Lie 变换群 $\mathscr{G}$,它是 Lie-Bäcklund 变换群的充分必要条件是无限小算子(5.5.5)满足方程

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{D}_i(\eta^\alpha)-u_j^\alpha \mathrm{D}_i(\xi^j)=\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial x^i}+u_i^\beta\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u^\beta}-u_j^\alpha\left(\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}+u_i^\beta\frac{\partial \xi^j}{\partial u^\beta}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +u_{ik}^\beta\left(\frac{\partial \eta^\alpha}{\partial u_k^\beta}-u_j^\alpha\frac{\partial \xi^j}{\partial u_k^\beta}\right),\\
&\zeta_i^\alpha=\mathrm{D}_i(\eta^\alpha)-u_j^\alpha \mathrm{D}_i(\xi^j),\\
&\zeta_{i_1 i_2}^\alpha=\mathrm{D}_{i_2}(\zeta_{i_1}^\alpha)-u_{i_1 j}^\alpha \mathrm{D}_{i_2}(\xi^j),\\
&\zeta_{i_1\cdots i_s}^\alpha=\mathrm{D}_{i_s}(\zeta_{i_1\cdots i_{s-1}}^\alpha)-u_{i_1\cdots i_{s-1} j}^\alpha \mathrm{D}_{i_s}(\xi^j).
\end{aligned}\right. \tag{5.5.14}$$

引进符号

$$u^\alpha=\eta^\alpha-u_j^\alpha\xi^j,$$

则方程(5.5.14)可写为

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta_i^\alpha=\mathrm{D}_i(u^\alpha)+\xi^j u_{ij}^\alpha,\\
&\zeta_{i_1 i_2}^\alpha=\mathrm{D}_{i_1}\mathrm{D}_{i_2}(u^\alpha)+\xi^j u_{i_1 i_2 j}^\alpha,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{5.5.15}$$

算子(5.5.5)与(5.5.15)称为 **Lie-Bäcklund 算子**,通常表示为

$$X=\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\cdots. \tag{5.5.16}$$

二、Lie-Bäcklund 变换对微分方程的应用

考虑给了一组微分方程

$$w_\nu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_k)=0 \quad (\nu=1,\cdots,m), \tag{5.5.17}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}=(u^1,\cdots,u^m)\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_k$ 是 $\boldsymbol{u}$ 相应的各阶导数.

令有一个 Lie-Bäcklund 变换 $\mathscr{G}$:

$$X=\xi^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_k)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_k)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}+\cdots. \tag{5.5.18}$$

考虑 $\mathscr{G}$ 作用于微分方程组(5.5.17)上,一般这些方程的阶数应增加,故在 $\mathscr{G}$ 作用后,我们应得到一个无穷阶的无穷方程组.所以我

们限于考虑 $\mathscr{G}$ 保持方程组(5.5.17)的情形. 为此引进下述定义.

定义 5.14　如果微分方程组

$$\begin{cases} w_v = 0, \\ \mathrm{D}_i w_v = 0, \\ \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j w_v = 0, \\ \cdots\cdots \end{cases} \quad (v = 1, \cdots, m) \tag{5.5.19}$$

给出的流形是 Lie-Bäcklund 变换的不变流形，则称方程组(5.5.17)是 Lie-Bäcklund 变换下的**不变微分方程**.

对于不变微分方程有如下定理：

定理 5.4　方程组(5.5.17)是 Lie-Bäcklund 变换下的不变方程的充分必要条件是 Lie-Bäcklund 变换的算子(5.5.15)作用于方程组(5.5.17)上有

$$X w_v = 0 \quad (v = 1, \cdots, m). \tag{5.5.20}$$

证明　定义 5.14 中的(5.5.19)式被 X 作用后得

$$\begin{cases} X w_v = 0, \\ X \mathrm{D}_i w_v = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{5.5.21}$$

由于(5.5.21)式中第一式显然包含(5.5.20)式，另外

$$\mathrm{D}_i X - X \mathrm{D}_i = \mathrm{D}_i(\xi^j)\mathrm{D}_j \quad (i = 1, 2, \cdots), \tag{5.5.22}$$

其中 X, D_i 分别由(5.5.18)式和(5.5.4)式定义，可看出方程组(5.5.19)和(5.5.20)是等价的. ▍

方程组(5.5.20)称为 Lie-Bäcklund 变换群的**规定方程**.

三、Bäcklund 变换

我们在第二章 §2.6 中引进的 Bäcklund 变换可以看做 Lie-Bäcklund 变换的特殊情形. 设有拟线性方程

$$Rr + Ss + Tt + V = 0, \tag{5.5.23}$$

这里 $r = z_{xx}, s = z_{xy}, t = z_{yy}, R, S, T, V$ 是 x, y, z 以及 $p = z_x, q = z_y$ 的函数. 这种形式的方程有时称为 **Monge-Ampére 方程**.

引进上述变量之间的 Bäcklund 变换

$$\begin{cases} p = f(z,\tilde{z},\tilde{p},\tilde{q}), \\ q = \varphi(z,\tilde{z},\tilde{p},\tilde{q}). \end{cases} \tag{5.5.24}$$

为了确定 f 与 φ，我们要求变换(5.5.24)满足可积条件

$$\Omega \equiv \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{5.5.25}$$

注意 f,φ 都是 $z,\tilde{z},\tilde{p},\tilde{q}$ 的函数，而 $z,\tilde{z},\tilde{p},\tilde{q}$ 又都是 x,y 的函数，所以

$$\begin{aligned} p_y &= f_z q + f_{\tilde{z}}\tilde{q} + f_{\tilde{p}}\tilde{s} + f_{\tilde{q}}\tilde{t}, \\ q_x &= \varphi_z p + \varphi_{\tilde{z}}\tilde{p} + \varphi_{\tilde{p}}\tilde{r} + \varphi_{\tilde{q}}\tilde{s}. \end{aligned} \tag{5.5.26}$$

把这两个表达式代入(5.5.25)式可得

$$\Omega \equiv -\varphi_{\tilde{p}}\tilde{r} + (f_{\tilde{p}} - \varphi_{\tilde{q}})\tilde{s} + f_{\tilde{q}}\tilde{t} - \varphi_{\tilde{z}}\tilde{p} + f_{\tilde{z}}\tilde{q} = 0. \tag{5.5.27}$$

如果 z 是方程(5.5.25)的解，利用变换(5.5.24)可以得到方程(5.5.27)的解 $\tilde{z}$，只要在方程(5.5.27)中 $f_{\tilde{q}},\varphi_{\tilde{p}}$ 或 $f_{\tilde{p}},\varphi_{\tilde{q}}$ 不同时为 0. 为了使方程(5.5.27)具有较简单的形式，f 和 φ 还可以选取较简单的已知关系. 特别是，如果选取 f,φ，使方程(5.5.27)和(5.5.23)相同，则变换(5.5.24)把一个解变换到另一个解. 而这正是我们在第二章 §6.1 中通过曲面几何的方法引进的 Bäcklund 变换的主旨.

例 1 对 Sine-Gorden 方程 $2z_{xy} = \sin 2z$，下述变换是 Bäcklund 变换：

$$\begin{cases} z_x + \tilde{z}_x = \dfrac{1}{a}\sin(z - \tilde{z}), \\ z_y - \tilde{z}_y = a\sin(z + \tilde{z}) \end{cases} \quad (a \neq 0).$$

例 2 考虑 KdV(Korteweg de Vries)方程

$$f(t,x,u) = u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

它在如下四个参数变换群作用下是不变的：

(1) $t \to t+a$; (时间平移)

(2) $x \to x+a$; (平移)

(3) $x \to x+ta$, $u \to u+a$; (Galileo 变换)

(4) $t \to a^3 t$, $x \to ax$, $u \to a^{-2}u$. (膨胀)

于是可得四个向量场

$$\boldsymbol{X}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \boldsymbol{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \boldsymbol{X}_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\boldsymbol{X}_4 = 3t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - 2u\frac{\partial}{\partial u} \quad (a = 1 \text{ 的邻域}).$$

下面我们来分析这四个变换下的不变解(利用坐标变换法,可证明只有如下四种形式的独立不变量):

(1) u,x 为不变量,即 u 不依赖于 t,这时方程化为

$$\varphi''' + \varphi\varphi' = 0,$$

则积分可得

$$\varphi(x) = c\left(3\operatorname{sech}^2\frac{\sqrt{c}}{2}x - 1\right)$$

(当 $|x| \to 0$ 时,$\varphi \to -c, \varphi' \to 0, \varphi'' \to 0, \varphi'(0) = 0$).

(2) u,t 为不变量,即 u 与 x 无关,于是方程

$$u_t = 0 \Rightarrow u = \text{const.} \quad (\text{平凡解})$$

(3) $t, u-x/t$ 为不变量(即 $\boldsymbol{X}_3(t)=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{X}_3(u-x/t)=\boldsymbol{0}$),由第一个得 $u=x/t+V(t)$,代入方程得

$$v = c/t, \quad u = (x+c)/t.$$

(4) $ut^{2/3}, x^3t^{-1}$ 是不变量,这时可令 $u=t^{-2/3}V(y), y=x^3t^{-1}$,代入原方程得

$$9y^2V''' + 18yV'' = \left(\frac{16}{9} + y^{2/3}V\right)V' - \frac{1}{3}yV = 0.$$

对于 $\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_3$,得不变解

$$u = t + V(y), \quad y = x - \frac{t^2}{2}, \quad V''' + VV' + 1 = 0.$$

对于 $\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_3$,得不变解

$$u=-t+V(y),\quad y=x+\frac{t^2}{2},\quad V'''+VV'-1=0.$$

Bäcklund 变换还可以使 KdV 方程线性化,扩展变量后,对包含导数的不变量可仿前面进行讨论.

例 3 对 KdV 方程

$$z_y+zz_x+z_{xxx}=0,$$

适合它的 Bäcklund 变换为

$$\begin{cases}z_x+\tilde{z}_x+\dfrac{1}{2}(z-\tilde{z})^2=0,\\ z_y+\tilde{z}_y+2(z_x^2+z_x\tilde{z}_x+\tilde{z}_x^2)-(z-\tilde{z})(z_{xx}-\tilde{z}_{xx})=0.\end{cases}$$

§5.6 与变换群有关的某些力学问题

一、不变量嵌入法

在实际求解问题时,设 $\varphi(x^1,x^2,\cdots,x^n)$是在单参数 Lie 变换群 $\boldsymbol{F}_t$ 作用下的不变量,对应于这个变换群的无限小向量为 $\boldsymbol{\xi}$,则 $\varphi(x^1,x^2,\cdots,x^n)$是不变量的条件应当是

$$\xi^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}=0. \tag{5.6.1}$$

这个方程归结于求解方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\xi^1}=\frac{\mathrm{d}x^2}{\xi^2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x^n}{\xi^n}.$$

这组方程一共有 $n-1$ 个第一积分,不妨令它们为

$$\eta^i=\omega_i(x^1,x^2,\cdots,x^n)\quad(i=1,2,\cdots,n-1),$$

于是含 n 个自变量的 φ 就可以表为含 $n-1$ 个自变量的 ψ,即有

$$\varphi(x^1,x^2,\cdots,x^n)=\psi(\eta^1,\eta^2,\cdots,\eta^{n-1}). \tag{5.6.2}$$

这样，我们就有以下的定理：

定理 5.5　若找到系统的一个单参数变换群，物理量 φ 是这个变换群的不变量，则这个物理量实质的自变量可以减少一个.

证明　设 φ 除了是 $\eta^i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 的函数外，还依赖于某一个 x^i，我们将证明这是不可能的. 令

$$\varphi(x)=\psi(\eta^1,\eta^2,\cdots,\eta^{n-1},x^i),$$

我们有

$$\begin{aligned} L_\xi\varphi &= \sum_{l=1}^{n-1}\xi^j\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta^l}\frac{\partial\eta^l}{\partial x^j}\right)+\xi^j\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\delta_{ij} \\ &= \sum_{l=1}^{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial\eta^l}\left(\xi^j\frac{\partial\eta^l}{\partial x^j}\right)+\xi^i\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\quad\text{（最后一项不求和）}. \end{aligned}$$

由于 η^l 是不变量，从而 $\xi^j\dfrac{\partial\eta^l}{\partial x^j}=0(l=1,2,\cdots,n-1)$，故有 $\xi^i\dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}=0$（不求和）. 当 $\xi^i\neq0$ 时，显然有 $\dfrac{\partial\psi}{\partial x^i}=0$. 而当 $\xi^i=0$ 时，方程(5.6.1)中就缺少 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ 这一项，因而在积分得到的函数 φ 中就不包含变量 x^i. 定理得证. ▌

二、量纲分析与相似性理论

设我们有一组物理量 $z_i(i=1,2,\cdots,m)$，如果取一种量纲单位，得到一组值，在不同的量纲单位中它们的值要改变. 用另一种语言来说，把模型按一定比例来变化，变到相似的一个物理问题，则相应的物理量也要变换，这两种变换可以统一为一个形式，即

$$z_i'=a_1^{\gamma_{i_1}}a_2^{\gamma_{i_2}}\cdots a_r^{\gamma_{i_r}}z_i\quad(i=1,2,\cdots,m).\qquad(5.6.3)$$

这实质上是一个含 r 个参数的变换群，可以验证它是符合变换群的条件的. 矩阵 $(\gamma_{i_\alpha})(i=1,2,\cdots,m;\ \alpha=1,2,\cdots,r)$ 称为**量纲矩阵**，而 γ_{i_α} 称为**量纲**. 若 $\gamma_{i_\alpha}=0$，则称 z_i 为无量纲量.

显然，若 $\mathrm{rank}(\gamma_{i_a})>m$，则问题的物理量的个数实质上是不变的.这时，一般来说 $r>m$. 如果 $m>r$，则由定理 5.5 所述的不变量的性质，说明问题的实质变量的个数可以减少至 r 个.这个事实就是量纲分析中的 π 定理.为了说明这一理论的应用，我们举例如下：

令给定结构在动荷作用下的挠度为 δ，它依赖于结构的特征尺寸 L、材料的弹性模量 E、密度 ρ_0、加载频率 Ω、力 F 与力矩 M，则在不同量纲条件下这些量的变换，即经受的变换群 $\mathscr{G}$ 为

$$\begin{cases}\delta' = a_M^0 a_L^1 a_T^0 \delta, \\ L' = a_M^0 a_L^1 a_T^0 L, \\ E' = a_M^1 a_L^{-1} a_T^{-2} E, \\ \rho' = a_M^1 a_L^{-3} a_T^0 \rho_0, \\ \Omega' = a_M^0 a_L^0 a_T^{-1} \Omega, \\ F' = a_M^1 a_L^1 a_T^{-2} F, \\ M' = a_M^1 a_L^2 a_T^{-2} M.\end{cases} \tag{5.6.4}$$

这个量纲变换的量纲矩阵如下：

$$\begin{array}{c} \\ a_M \\ a_L \\ a_T \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc}\delta & L & E & \rho_0 & \Omega & F & M\end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\end{array},$$

由通常的量纲分析我们可以得到

$$\frac{\delta}{L} = \varphi\left(\frac{F}{EL^2}, \frac{M}{EL^3}, \frac{\Omega L\rho_0^{1/2}}{E^{1/2}}\right),$$

式中的 $\frac{\delta}{L}, \frac{F}{EL^2}, \frac{M}{EL^3}, \frac{\Omega L\rho_0^{1/2}}{E^{1/2}}$ 都是无量纲量.可以验证它们都是变换(5.6.4)之下的不变量.在这个问题中群参数有 3 个，即 $r=3$，物理量有 7 个，即 $m=7$，所以我们可以得到 4 个不变量，所要求的物理方程就是这 4 个不变量之间的关系.总之，物理问题可以表达为

无量纲量之间的关系，也就是说可以表达为量纲变换群 $\mathscr{G}$ 作用下的不变量之间的关系.

事实上，以上的量纲分析的方法可以适当推广，用于求解方程. 举例如下：

考虑热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

其定解条件是

$$\begin{cases}u(y,0)=0,\ y>0,\\ u(0,t)=U(t),\ t>0,\\ u(\infty,t)=0.\end{cases}$$

考虑单参数变换群 $\mathscr{G}$：$t=A^{\alpha_1}t'$，$y=A^{\alpha_2}y'$，$u=A^{\alpha_3}u'$，其中 A 是这个变换群的群参数，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 待定. 把它们代入方程得

$$\frac{A^{\alpha_3}}{A^{\alpha_1}}\cdot\frac{\partial u'}{\partial t'}-\frac{A^{\alpha_3}}{A^{2\alpha_2}}\left(\upsilon\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right)=0.$$

要方程在变换之下不变，必须有 $\alpha_3-\alpha_1=\alpha_3-2\alpha_2$，亦即 $\alpha_2=\frac{\alpha_1}{2}$. 如果要求 $yt^r=y't'^r$，$ut^s=u't'^s$，则在 $\mathscr{G}$ 作用下它们是不变量. 易于求出

$$r=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=-\frac{1}{2},\quad s=-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}=-\delta,$$

即可以得到不变量

$$\frac{u}{t^\delta}=F\left(\frac{y}{t^{1/2}}\right).$$

上述表达式并不是在任何定解条件下都可以得到解的. 对定解条件适当简化，例如考虑定解条件变为

$$F(\infty)=0,\quad U(t)=U_0t^\delta,\quad U_0=U(0)=F(0).$$

把 $u=t^\delta F\left(\frac{y}{t^{1/2}}\right)$代入方程，记 $\zeta=\frac{y}{t^{1/2}}$，可得 F 满足的常微分方程

$$\upsilon F''+\frac{1}{2}\zeta F'-\delta F=0.$$

在边界条件 $F(0)=U_0$，$F(\infty)=0$ 下求解这个方程就可以得到所需要的解.

三、算子与分离变量

命题　设线性算子 L 满足

$$[L,Q]=LQ-QL=RQ,$$

u 为 $Qu=0$ 的解，则 Lu 也是 $Qu=0$ 的解.

事实上，由于

$$Q(Lu)=LQu-RQu,$$

又因为 u 是 $Qu=0$ 的解，所以 Lu 也是 $Qu=0$ 的解. 这样，对 Q 可以寻找所有的 L，即保持解的 Lie 变换群. 用这一方案可以将全部特殊函数定义出来.

利用这个方法，对于给定的 Q，可以用待定的办法来求解算子 L.

例　令

$$Q\varphi=\Delta_2\varphi+\omega^2=0, \tag{5.6.5}$$

即 Q 是 Helmholtz 算子，再令

$$L=X(x,y)\partial_x+Y(x,y)\partial_y+Z(x,y).$$

把它们代入 $[L,Q]=RQ$ 可以得到

$$\begin{aligned}2X_x\partial_{xx}&+2(X_y+Y_x)\partial_{xy}+2Y_y\partial_{yy}+(X_{xx}+X_{yy}+2Z_x)\partial_x\\&+(Y_{xx}+Y_{yy}+2Z_y)\partial_y+(Z_{xx}+Z_{yy})\\&=-R(\partial_{xx}+\partial_{yy}+\omega^2).\end{aligned}$$

算子要相等，则对应偏导数的系数应当为零，即

(1) $2X_x=-R=2Y_y$，$X_x+Y_y=0$；

(2) $X_{xx}+X_{yy}+2Z_x=0$，$Y_{xx}+Y_{yy}+2Z_y=0$；

(3) $Z_{xx}+Z_{yy}=-R\omega^2$.

由(1)知 $X_x=Y_y$，$X_y=Y_x$，则有

$$X_{xx}+X_{yy}=Y_{xy}-Y_{xy}=0.$$

同样有

$$Y_{xx}+Y_{yy}=0.$$

把这一结果与(2)相比有

$$Z_x = Z_y = 0, \quad 即 \quad Z = \text{const}.$$

又由(3)有 $R=0$，则 $X=X(y), Y=Y(x), X'(y)=Y'(x)$，于是 $X'=-Y'=\gamma$，从而有

$$L = (\alpha+\gamma y)\partial_x + (\beta-\gamma x)\partial_y + \delta.$$

由此可以令 $P_1=\partial_x, P_2=\partial_y, M=y\partial_x-x\partial_y, E=1$，这样我们就得到了三个基算子，它们构成了一个 Lie 代数：

$$[P_1,P_2]=0, \quad [M,P_1]=P_2, \quad [M,P_2]=-P_1.$$

显然，它们对应于平面上的平移和旋转群. 利用这个办法可以把求解(5.6.5)的分离变量和求解 P_1,P_2,M 的特征值问题结合起来.

事实上，若 $\varphi_i=A_iX_i(x)Y_i(y)$，代入方程就有

$$X''Y + XY'' + \omega^2 XY = 0,$$

即

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\omega^2.$$

于是有

$X''(x)+k^2X(x)=0$ 相应于 $P_1\psi_k = \mathrm{i}k\psi_k$；

$Y''(y)+(\omega^2-k^2)Y(y)=0$ 相应于 $P_2\psi_k=\mathrm{i}(\omega^2-k^2)^{1/2}\psi_k$.

这就是直角坐标中的分离变量.

对于极坐标，可以得到 $M\psi_k=-\mathrm{i}k\psi_k$ 的解.

也就是说，通过以上的讨论把分离变量与平面上的群算子联系了起来.

今以 Lax 处理 KdV 方程的方法为例来讨论对称算子方法对非线性问题的应用.

设给了 Sturm-Liouville 方程为

$$Ly = \lambda y, \tag{5.6.6}$$

其中 $Ly=\mathrm{D}^2-u(x,t)$，$\mathrm{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. 这一方程对 t 求导数得

$$(Ly)_t = Ly_t + L_ty = \lambda_t y + \lambda y_t, \tag{5.6.7}$$

但 $(Ly)_t = y_{xxt}-u_ty-uy_t = Ly_t - u_ty$，由此得 $L_t=-u_t$.

设 t 是 u 的自变量,则 y 也依赖于 t. 下面考虑 $\lambda_t=0$ 的情形,即考虑在方程(5.6.6)中具有同一特征值的 u 和 y 有什么关系. 我们设

$$y_t = By,$$

这里 B 是某个线性微分算子,它并不唯一确定,但下面我们要去确定它.

方程(5.6.7)可以写为

$$-\lambda y_t + Ly_t - u_t y = (-u_t + LB - BL)y = 0,$$

即
$$(-u_t + [L,B])y = 0 \quad (\text{因为 } \lambda_t = 0). \tag{5.6.8}$$

我们要选定 B 满足上式. 一般来说,这是一个算子方程.

(1) 令 $B=B_1=a\mathrm{D}$,代入(5.6.8)式得

$$\begin{aligned}[L,B_1]y &= (LB_1 - B_1L)y = (\mathrm{D}^2 - u)ay_x - a\mathrm{D}(y_{xx} - u_y) \\ &= 2a_x\mathrm{D}^2y + a_{xx}\mathrm{D}y + au_xy.\end{aligned}$$

若 a 为常数,即有$[L,B_1]=au_x$,则(5.6.8)式化为

$$(u_t - au_x)y = 0.$$

这是一种平凡的情形,我们不感兴趣.

(2) 设

$$B = B_3 = a\mathrm{D}^3 + f\mathrm{D} + g,$$

则有

$$\begin{aligned}[L,B_3]y =& (2f_x + 3au_x)\mathrm{D}^2y + (f_{xx} + 2g_x + 3au_x)\mathrm{D}y \\ &+ (g_{xx} + au_{xxx} + fu_x)y.\end{aligned}$$

如果令 $f=-\dfrac{3}{2}au+c_1$, $g=-\dfrac{4}{3}au_x+c_2$,其中 c_1,c_2 是 t 的函数,则上式可以化为

$$[L,B_3] = \left[\frac{1}{4}a(u_{xxx} - 6uu_x) + c_1u_x\right]y.$$

令 $a=-4$,$c_1(t)=0$,由于 $\mathrm{d}x'=\mathrm{d}x+c_1(t)\mathrm{d}t$,$\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t$,故有 $-u_t+[L,B_3]=0$,于是

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

若令 $u=-\frac{1}{6}U$，则上式化为

$$U_t+UU_x+U_{xxx}=0. \tag{5.6.9}$$

这说明，在条件(5.6.9)下，方程(5.6.6)具有相同的特征值. 如果把方程(5.6.6)理解为 Schudinger 方程，把 $U(x,t)$理解为势，则满足同一特征值的势由(5.6.9)式决定.

习 题 五

1. 求下列方程所确定的单参数变换群：

(1) $\frac{dx}{dt}=c_1x,\ \frac{dy}{dt}=c_2y$； (2) $\frac{dx}{dt}=c_1,\ \frac{dy}{dt}=c_2y$；

(3) $\frac{dx}{dt}=ax+by,\ \frac{dy}{dt}=cx+dy$.

2. 令向量

$$\boldsymbol{X}_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad \boldsymbol{X}_2=\frac{\partial}{\partial t},\quad \boldsymbol{X}_3=u\frac{\partial}{\partial u},\quad \boldsymbol{X}_4=x\frac{\partial}{\partial x}+2t\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{X}_5=2t\frac{\partial}{\partial x}-xu\frac{\partial}{\partial u},\quad \boldsymbol{X}_6=4tx\frac{\partial}{\partial x}+4t^2\frac{\partial}{\partial t}-(x^2+2t)u\frac{\partial}{\partial u},$$

在它们作用下 $u_t=u_{xx}$不变. 试计算各向量之间的 Lie 括弧$[\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{X}_j]$.

3. 试验证非线性方程组 $v_y-v_x=0$，$v_y+uu_x=0$ 在群

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(yu^2-xv)\frac{\partial}{\partial x}-(xu+2yv)\frac{\partial}{\partial y}+2uv\frac{\partial}{\partial u}\\ \qquad+\left(-\frac{2}{3}u^3+\frac{3}{2}v^2\right)\frac{\partial}{\partial v},\\ \boldsymbol{\alpha}_2=x\frac{\partial}{\partial x}+2u\frac{\partial}{\partial u}+3v\frac{\partial}{\partial v},\\ \boldsymbol{\alpha}_3=\frac{\partial}{\partial v},\\ \boldsymbol{\alpha}_4=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\end{cases}$$

作用下不变.

4. 求方程 $u_{tt}-u_{xx}+u^m=0$ 所允许的变换群(即在该变换群下方程的解集不变).

5. 设 $\boldsymbol{a}=x\dfrac{\partial}{\partial x}+ku\dfrac{\partial}{\partial u}$是使方程 $u''=F(x,u')$不变的变换群,试求 $F(x,u')$.

6. 试求对三维空间$\mathbb{R}^3$中所有平移和转动变换群的 Lie 代数及其矩阵表示.

7. 设给定形式为 $y'=g(x,y)$的方程,试求在平面转动之下不变的所有 $g(x,y)$.

第六章　动力系统的几何理论

§6.1　Symplectic 几何与多自由度的 Hamilton 动力系统

一、相空间及其度量

我们在前几章中看到平面运动的度量标准形

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}y^2 \wedge \mathrm{d}y^1$$

确定了空间的性质，而在第三章看到对于给了动能的保守系统，可以看做 Riemann 空间的惯性运动. 动能二次形可看做这个空间的度量. 现在，我们要讨论另一种引进度量的方式. 它使力学中的 Hamilton 方程成为这个空间的梯度方程.

我们知道函数 $f(y^1, \cdots, y^m)$ 的梯度函数可表示为

$$(\nabla f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial y^j}, \tag{6.1.1}$$

在这里矩阵 (g_{ij}) 不一定是对称的. 由梯度向量场产生的曲线满足方程

$$\dot{y}^i = (\nabla f)^i. \tag{6.1.2}$$

这些方程的积分曲线称为 f 的**梯度曲线或流线**.

现在对任意函数 f，考虑它沿 f 的梯度方向的导数 $\dot{h}$，则有

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial y^i}\dot{y}^i = \frac{\partial h}{\partial y^i}(\nabla f)^i = \frac{\partial h}{\partial y^i} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial y^j} = (\nabla h, \nabla f). \tag{6.1.3}$$

为了考虑反对称度量，引进

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, \mathrm{d}y^i \wedge \mathrm{d}y^j = \mathrm{d}y^1 \wedge \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}y^2 \wedge \mathrm{d}y^1 \quad (\text{对 } n = 2 \text{ 时}), \tag{6.1.4}$$

其中 $g_{ij}=-g_{ji}$，$\det(g_{ij})\neq 0$. 所有的 $\boldsymbol{\Omega}$ 构成一个 $2n$ 维的线性向量空间，称之为**相空间**.

记相空间的坐标为

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=(x^1,\cdots,x^n,p_1,\cdots,p_n)=(y^1,\cdots,y^{2n}).\qquad(6.1.5)$$

有时为了方便我们也将 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ 称为相空间. 这也就是分析力学中引进的相空间的坐标. 对于力学问题，在这组坐标下 $\boldsymbol{\Omega}$ 具有以下形式：

$$\boldsymbol{\Omega}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}p_i,\qquad(6.1.6)$$

这时 (g_{ij}) 有简单的形式

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}.$$

定义 6.1　称具有如(6.1.6)式度量形式的 $2n$ 维线性向量空间为 **Symplectic 空间**，记做 $\mathbb{S}^{2n}$. 这时(6.1.6)式中的 $\boldsymbol{\Omega}$ 称为 **Symplectic 形式**. $\mathbb{S}^{2n}$ 上的线性代数构成 **Symplectic 几何**.

在正则坐标中 Hamilton 方程具有十分简单的形式

$$\dot{y}^i=(\nabla H)^i\quad(i=1,\cdots,2n)$$

或

$$\begin{cases}\dot{x}^i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i},\\[2mm] \dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial x^i}.\end{cases}\qquad(6.1.7)$$

对于任一函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$，由(6.1.7)式有

$$\dot{f}=\frac{\partial f}{\partial t}+(\nabla f,\nabla H).\qquad(6.1.8)$$

特别地，当 $f=H=H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$ 时，由于 $(\nabla H,\nabla H)=-(\nabla H,\nabla H)=0$，我们有

$$E\triangleq\dot{H}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

由此，若扩充相空间为 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t,E)$，令 $x^{n+1}=t$，$p_{n+1}=E$，并且 (g_{ij}) 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 分别扩充为

$$(\tilde{g}^{ij}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & 0 & -1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i - \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}E, \tag{6.1.9}$$

再令 $\tilde{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t,E)=H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)-E$，则有

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad \dot{t} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial E}, \quad \dot{E} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}. \tag{6.1.10}$$

由此可以看出，若 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$不显含 t，则有 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$. 这时，由(6.1.10)式的最后一式得 $E=\mathrm{const}$. 这就是能量守恒定律.

二、Poisson 括弧

如果给定了$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$的两个函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$和 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$以及相空间的度量$(g_{ij})=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，则它们梯度的内积为

$$\begin{aligned} \{f,g\} &= (\nabla f, \nabla g) = \sum_{i,j=1}^{2n} g_{ij} \frac{\partial f}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial y^j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

$\{f,g\}$称为 **Poisson 括弧.**

易于验证 Poisson 括弧具有下列性质：

(1) $\{f,g\}=-\{g,f\}$，$\{\lambda f_1+\mu f_2,g\}=\lambda\{f_1,g\}+\mu(f_2,g)$，其中 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$；

(2) Jacobi 恒等式：

$$\{f,\{g,h\}\}+\{h,\{f,g\}\}+\{g,\{f,h\}\}=0;$$

(3) $\{fg,h\}=f\{g,h\}+g\{f,h\}$；

(4) $\nabla(f,g)=-[\nabla f,\nabla g]$，其中 $[,]$为我们在第四章 §5 中定义过的 Poisson 括弧或 Lie 括号.

性质(1)～(3)易于验证，实际上，对(2)取梯度，利用(4)，就得到第四章的(4.4.30)式，所以知 Jacobi 恒等式(2)和第四章的(4.4.30)式是梯度和积分的关系，故它们可以互推.

现在我们只验证性质(4). 由于

$$[\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}]=\xi^j\frac{\partial\eta^i}{\partial y^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial y^j},$$

则得对于 $\boldsymbol{x}$ 坐标的$[,]^1$ 为

$$\begin{aligned}[\nabla f,\nabla g]^1 &=\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)\\&\quad-\frac{\partial g}{\partial p}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)+\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)+\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\\&\quad-\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)-\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\\&=\frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\right)=-\nabla\{f,g\}^1.\end{aligned}$$

对于 $\boldsymbol{p}$ 坐标同样证明.

Poisson 括弧的性质说明，对于定义在相空间上的函数，它构成 Lie 代数.

现在我们来讨论下述定理：

定理 6.1　如果微分形式 $\boldsymbol{\Omega}$ 是闭形，即 $\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{0}$，则由(6.1.11)式确定的光滑函数的 Poisson 括弧构成 Lie 代数；反之，若由(6.1.11)式确定的光滑函数的 Poisson 括弧构成 Lie 代数，则 $\boldsymbol{\Omega}$ 是闭形.

证明　由于 $\boldsymbol{\Omega}$ 是微分形式：

$$\boldsymbol{\Omega}=\sum_{i,j=1}^{2n}g_{ij}\,\mathrm{d}y^i\wedge\mathrm{d}y^j,$$

故由上式 g_{ij} 定义的(6.1.11)式自然满足反交换律

$$\{f,g\}=-\{g,f\},\tag{6.1.12}$$

所以剩下的只要验证 Jacobi 恒等式. 而它等价于

$$\nabla\{f,g\}=-[\nabla f,\nabla g],\tag{6.1.13}$$

写出其左端坐标形式：

$$\nabla\{f,g\}^k=g^{kl}\frac{\partial g^{ij}}{\partial g^l}\cdot\frac{\partial f}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial g}{\partial y^j}+g^{kl}g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^l\partial y^i}\cdot\frac{\partial g}{\partial y^j}+\frac{\partial f}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial y^l\partial y^j}\right),$$

而右端的坐标形式为

$$-[\nabla f,\nabla g]^k=g^{il}\frac{\partial g^{kj}}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial g}{\partial y^l}\cdot\frac{\partial f}{\partial y^j}-g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial f}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial g}{\partial y^l}$$

$$+g^{ij}g^{kl}\frac{\partial g}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^j\partial y^i}-g^{ij}g^{kl}\frac{\partial f}{\partial y^i}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial y^i\partial y^l},$$

将这两式等起来得

$$\left(g^{li}\frac{\partial g^{jl}}{\partial y^i}+g^{li}\frac{\partial g^{kj}}{\partial y^i}+g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial y^i}\right)\frac{\partial f}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial g}{\partial y^l}=0.$$

由于$\frac{\partial f}{\partial y^j}$和$\frac{\partial g}{\partial y^l}$的任意性，故有

$$g^{ki}\frac{\partial g^{jl}}{\partial y^i}+g^{li}\frac{\partial g^{kj}}{\partial y^i}+g^{ij}\frac{\partial g^{kl}}{\partial y^i}=0.\tag{6.1.14}$$

上式乘以 $g_{rk}g_{pj}g_{ql}$，考虑到

$$g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial y^l}=-g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^l},$$

最后得

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial y^r}+\frac{\partial g_{qr}}{\partial y^p}+\frac{\partial g_{rp}}{\partial y^q}=0.\tag{6.1.15}$$

而这个式子正好是 $\boldsymbol{\Omega}$ 为闭形的条件．定理得证．▎

现在我们讨论这样的问题：若 $\boldsymbol{\Omega}$ 为闭形，且 $\boldsymbol{\Omega}$ 不退化，即 $\boldsymbol{\Omega}^n\neq\mathbf{0}$，是否存在一个坐标系使 $\boldsymbol{\Omega}$ 的正则的形状如(6.1.6)式？回答是肯定的．由下述定理给出．

定理 6.2(Darboux 定理)　设 $\boldsymbol{\Omega}$ 是一个定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中点 $\boldsymbol{y}$ 的某邻域内的非退化二次闭形，则在该邻域内可以选取坐标$(x^1,\cdots,x^n,p_1,\cdots,p_n)$使这个二次闭形为

$$\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}p_i.\tag{6.1.16}$$

证明　考虑在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域内，令 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 是常系数的二次微分形式，

坐标是以 $\boldsymbol{x}$ 为参量，而 $\boldsymbol{\Omega}_t$ 为定理中给定的非退化二次闭形，以 $\boldsymbol{y}$ 为坐标参量. 现在我们要引进 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的坐标变换：

$$f:\boldsymbol{y}\mapsto\boldsymbol{x}. \tag{6.1.17}$$

首先考虑二次微分形式

$$\boldsymbol{\Omega}_t=\boldsymbol{\Omega}_0+(\boldsymbol{\Omega}_t-\boldsymbol{\Omega}_0) \tag{6.1.18}$$

这时由于假设 $\boldsymbol{\Omega}_t$ 是闭形，根据 Poincaré 逆定理知，在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域内存在一次微分形式 $\boldsymbol{\omega}$，使

$$\boldsymbol{\Omega}_t-\boldsymbol{\Omega}_0=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}, \tag{6.1.19}$$

而且不妨设在点 $\boldsymbol{x}_0$ 有 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$.

设变换(6.1.17)为向量场 $\boldsymbol{v}_t$ 所定义的变换群，显然，它也依赖于参数 t，记为 f_t. 再考虑

$$v_t^i(g_{ij}\mathrm{d}y^j)_t=\boldsymbol{v}_t\cdot\boldsymbol{\Omega}_t=-\boldsymbol{\omega}. \tag{6.1.20}$$

(6.1.20)式中，对于给定的 $\boldsymbol{\omega}$，由于 $(g_{ij})_t$ 是非退化的，所以可以唯一地确定一个向量场 $\boldsymbol{v}_t$.

最后，考虑二次微分形式 $\boldsymbol{\Omega}_t$ 在经过变换 f_t 所引起的切空间的对偶变换 f_t^* 后得到的二次微分形式对 t 的变化率. 由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f_t^*\boldsymbol{\Omega}_t)&=f_t^*L_{\boldsymbol{v}_t}\boldsymbol{\Omega}_t+f_t^*\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}_t}{\mathrm{d}t}\\&=f_t^*\,\mathrm{d}(\boldsymbol{v}_t\cdot\boldsymbol{\Omega}_t)+f_t^*\,(\boldsymbol{\Omega}_1-\boldsymbol{\Omega}_0)\\&=f_t^*\,(-\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})+f_t^*\,(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{0},\end{aligned} \tag{6.1.21}$$

从而有 $f_t^*\boldsymbol{\Omega}_t=f_0^*\boldsymbol{\Omega}_0=\overline{\boldsymbol{\Omega}}_0$，即 f_t 将 $\boldsymbol{\Omega}_t$ 变为常系数的二次微分形式 $\overline{\boldsymbol{\Omega}}_0$.

对于常系数的 $\boldsymbol{\Omega}=\sum\limits_{i,j=1}^{2n}g_{ij}\mathrm{d}y^i\wedge\mathrm{d}y^j$，即当 g_{ij} 为常数时，可以找寻一个线性变换，将 (g_{ij}) 变为反对角形矩形，即

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_n\\-\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}_{2n\times2n} \tag{6.1.22}$$

($\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位阵). 这时，我们就有标准形式(请读者证明)

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i, \tag{6.1.23}$$

即定理得证. ▌

Darbaux 定理是关于 Symplectic 几何的基本定理,它说明当 g_{ij} 不是常数时,Symplectic 几何可以通过坐标变换将一次微分形式变为常系数,且为标准形式(6.1.23),即可化为平直的空间. 这个性质对于 Riemann 几何是不成立的,在那里不可能通过坐标变换将一次微分形式变为常系数.

三、Symplectic 几何与 Hamilton 动力系统

设我们在正则坐标中有一个 Hamilton 函数 H,这时任何函数 $f=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$沿着 Hamilton 系统的导数为

$$\dot{f} = \{f,H\}. \tag{6.1.24}$$

特别地,有

$$\dot{x}^i = \{x^i,H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = \{p_i,H\} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}.$$

由以上讨论,立刻可得:如果$\{f,H\}=0$,这时 f 称为 **Hamilton 系统的积分**,则 Hamilton 系统积分的集合组成 Lie 代数,关于相乘的函数是封闭的. 这个结论可由(6.1.12)式直接得到,即若 f,g 满足$\{f,H\}=0$,$\{g,H\}=0$,则有$\{\{f,g\},H\}=0$,即两个积分的 Poisson 括号还是 Hamilton 系统的积分.

对于不显含时间 t 的 Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=0$,有$\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$. 这表示沿梯度$\nabla f$ 上 H 保持常数,因而∇f 与等能面 $H=E$ 相切. 由于切于给定面的向量场张成 Lie 代数的子代数,所以说,Hamilton 系统的 Lie 代数是在给定能量 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=E$ 水准上的 Lie 代数.

现在我们引进如下定理:

定理 6.3　令 Hamilton 系统有 Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$,满足

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i^i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i=1,\cdots,n),$$

则二次微分形式 $\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}p_i$ 在 Hamilton 系统上保持

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}=\mathbf{0}. \tag{6.1.25}$$

证明　由于 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}=L_{\nabla H}\boldsymbol{\Omega}$，为了计算它，考虑

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{\Omega}_1,\boldsymbol{\Omega}_2)}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{\Omega}}_1\wedge\boldsymbol{\Omega}_2+\boldsymbol{\Omega}_1\wedge\dot{\boldsymbol{\Omega}}_2, \tag{6.1.26}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}x^i)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)=\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial x^j}\mathrm{d}x^j+\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial p_j}\mathrm{d}p_j, \tag{6.1.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}p_j)}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{d}\left(\frac{\partial H}{\partial x^i}\right)=-\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\partial x^j}\mathrm{d}x^j-\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\partial p_j}\mathrm{d}p_j. \tag{6.1.28}$$

由此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}p_j)}{\mathrm{d}t}=&\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}p_i+\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial p_j}\mathrm{d}p_j\wedge\mathrm{d}p_i\\&-\mathrm{d}x^i\wedge\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\partial x^j}\mathrm{d}x^j-\mathrm{d}x^i\wedge\frac{\partial^2 H}{\partial x^i\partial p_j}\mathrm{d}p_j=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

上式考虑了外积的反对称性恒为零. ▌

推论(Liouville 定理)　相空间 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ 中的体积在 Hamilton 系统运动之下保持不变.

证明　因为 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}=\mathbf{0}$，由(6.1.26)式得

$$\underbrace{\boldsymbol{\Omega}\wedge\ldots\wedge\boldsymbol{\Omega}}_{n\text{个}}=\mathbf{0},$$

因而这一空间的体积不变，即相空间中的体积是 Hamilton 系统运动产生空间点的变换下的不变量. ▌

定义 6.2　定义在流形 $\mathscr{M}^{2n}$ 中的(局部)变换 ϕ: $\mathrm{S}^{2n}\to\mathrm{S}^{2n}$，如果它保持定义在 $\mathscr{M}^{2n}$ 上的 Symplectic 二次微分形式 $\boldsymbol{\Omega}$ 不变，则称 ϕ 为**(局部)正则变换**.

换句话说，正则变换是 Symplectic 空间的运动变换，即保持 Symplectic 空间的度量不变的变换. 既然 Hamilton 系统的运动轨线是单参数正则变换群，它就对应一个向量场.

定理 6.4　若给了向量场 $\boldsymbol{\xi}=\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}},-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)$，则存在局部光滑且单值的 Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$，使给定的向量场 $\boldsymbol{\xi}$ 就是由函数

$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$对应的向量场.

证明　令在$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$坐标中,$\boldsymbol{\xi}=(A^i,B_i)$,考虑对微小时间间隔$\Delta t$,有

$$\phi_{\Delta t}:\begin{cases} x^i \mapsto x^i + A^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\Delta t + o(\Delta t) \xlongequal{\text{记为}} x^{i\prime}, \\ p_i \mapsto p_i + B_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})\Delta t + o(\Delta t) \xlongequal{\text{记为}} p_i'. \end{cases}$$

定理要求保持二次形

$$dx^i \wedge dp_i = dx^{i\prime} \wedge dp_i',$$

即

$$\begin{aligned} dx^i \wedge dp_i &= (dx^i + (dA^i)\Delta t) \wedge (dp_i + (dB_i)\Delta t) \\ &= dx^i \wedge dp_i + \Delta t\Big(\frac{\partial A^i}{\partial x^j}dx^j \wedge dp_i + \frac{\partial A^i}{\partial p_j}dp_j \wedge dp_i \\ &\quad + \frac{\partial B_i}{\partial p_j}dx^i \wedge dp_j + \frac{\partial B_i}{\partial x^j}dx^i \wedge dx^j\Big) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

由此得

(1) $\dfrac{\partial A^i}{\partial p_j}dp_i \wedge dp_j = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial A^i}{\partial p_j} = \dfrac{\partial A^j}{\partial p_i}$;

(2) $\dfrac{\partial B_i}{\partial x^j}dx^i \wedge dx^j = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial B_i}{\partial x^j} = \dfrac{\partial B_j}{\partial x^i}$;

(3) $\dfrac{\partial A^i}{\partial x^j}dx^j \wedge dp_i = -\dfrac{\partial B_i}{\partial p_j}dx^i \wedge dp_j \Longleftrightarrow \dfrac{\partial A^i}{\partial x^j} = -\dfrac{\partial B_j}{\partial p_i}$.

如果 $A^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $B_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x^i}$,则这些条件得到满足. 反之,由这些条件知公式 $A^i dp_i - B_i dx^i$ 是完全微分,由此给出 Hamilton 函数

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) = \int_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_0)}^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})} (-B_i dx^i + A^i dp_i).$$

定理得证. ▌

注　当 H 显含时间 t 时,所得的变换 ϕ_t 不是群,因为

$$\phi_{t_1}\circ\phi_{t_2} \neq \phi_{t_1+t_2}.$$

当 $n=1$ 时, $\boldsymbol{\Omega}=dx\wedge dp$,守恒的二次形对应于面积定理.

在相空间$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$的线性正则变换称为 Symplectic 变换. 当 $n=1$

时，Symplectic 变换就是 $\mathscr{SL}(2,\mathbb{R})$. 如果 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$是二次型

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}a_{ij}x^ix^j+b_{ij}x^ip_j+c_{ij}p_ip_j, \qquad (6.1.29)$$

则它对应于对称矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix},\quad \text{其中}\quad \boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij}),\boldsymbol{C}=(c_{ij}), \qquad (6.1.30)$$

此处 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是对称的. 如果 $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$，则有

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{y},\quad \text{其中}\quad \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ -\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}. \qquad (6.1.31)$$

这样一来，Symplectic 群的 Lie 代数具有矩阵形式 $\boldsymbol{K}$. 这一 Lie 代数和二次型(6.1.29)关于 Poisson 括号的 Lie 代数重合. 二次微分形式的 Hamilton 系统称为**广义振动系统**.

四、Hamilton-Jacobi 方程

现在我们这样来提出问题：考虑 $t=0$ 时，在 $2n$ 维相空间的 n 维曲面 Γ，它的方程为

$$p_i=f_i(x^1,\cdots,x^n)\ (i=1,\cdots,n). \qquad (6.1.32)$$

曲面上每一点将沿着具有 Hamilton 函数 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$的轨线运动. 在 $t>0$时，得到变了形的曲面 Γ_t，且 $\Gamma=\Gamma_0$. 在推广的相空间$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t,E)$中把这些超曲面看做 $n+1$ 维曲面更为方便些. 当 $t=0$ 时，它的截口便是 Γ_0.

定义 6.3 曲面 Γ^{n+1}在推广的相空间中称为是 **Lagrange 曲面**，如果在 Γ^{n+1}上任一曲线 γ 从任一点出发，作用量 $S=\int_\gamma(\boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-E\mathrm{d}t)$ $(E=\dot{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t)$在曲面 Γ^{n+1} 上)是有界点的局部单值函数.

定理 6.5 设 Γ_0 的方程是 $p_i=f_i(\boldsymbol{x})\,(i=1,\cdots,n)$（或对于 Γ^{n+1}时，$i=0,1,\cdots,n,p_0=E,x^0=t$)，它为 Lagrange 曲面的充分必要条件是

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{x})}{\partial x^i} = p_i \quad (\text{在}\ \Gamma^n\ \text{上}); \tag{6.1.33}$$

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{x},t)}{\partial x^i} = p_i \quad (\text{在}\ \Gamma^{n+1}\ \text{上}) \tag{6.1.34}$$

和

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = -H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) \quad \text{或} \quad \frac{\partial S(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = -H\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}},t\right).$$

证明 设 S 是局部单值函数. 因为 $S=\int \boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-H\mathrm{d}t$,按照定义则有 $\mathrm{d}S=\boldsymbol{p}\mathrm{d}\boldsymbol{x}-H\mathrm{d}t$. 由此

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}}, \quad -H = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

相反,若 $\boldsymbol{p}=\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}}, -H=\frac{\partial S}{\partial t}$,则 S 是单值的. ▌

作用量 $S(\boldsymbol{x},t)$称为**轨线作用量**,而方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}},t\right) = 0 \tag{6.1.35}$$

称为 **Hamilton-Jacobi 方程**.

若已知 $S(\boldsymbol{x},t)$,则 Γ^{n+1} 由方程 $\boldsymbol{p}=\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}}$, $E=-\frac{\partial S}{\partial t}$给出. 而它的截口是当 $t=t_0$ 时 $\Gamma^{n+1}_{t_0}$ 从 $\Gamma=\Gamma_0$ 按 $\dot{\boldsymbol{p}}=-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{x}}=\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}$运动到时刻 t 得到.

在相空间$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})$中,$n$ 维曲面 Γ 称为是 **Lagrange 曲面**,如果它的任意的切向量的反对称积为零 (即在 Γ 上 $\boldsymbol{\Omega} = \sum \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}p_i$ 为零).

显然在正则变换下,Lagrange 曲面仍是 Lagrange 曲面.

例如,$\Gamma_{x_0} = \{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{p}\ \text{变化}\}$和 $\Gamma_{p_0} = \{\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{x}\ \text{变化}\}$都是 Lagrange曲面,且变换 $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\mapsto-\boldsymbol{x}$ 互换了 Γ_{x_0} 与 Γ_{p_0}.

定理 6.6 若 $p_i=f_i(\boldsymbol{x})$给出了 Lagrange 曲面,则可以求出 $S(\boldsymbol{x})$,使得 $f_i=\frac{\partial S(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}$;反之亦然.

证明　若曲面 Γ 由 $p_i=f_i(\boldsymbol{x})$ 给出，则 $\boldsymbol{\Omega}$ 在 Γ 上为

$$\boldsymbol{\Omega}\Big|_{\Gamma}=\sum \mathrm{d}x^i\wedge \mathrm{d}p_i(\boldsymbol{x})=\sum \mathrm{d}x^i\wedge \mathrm{d}x^j.$$

由此有

$$\boldsymbol{\Omega}\Big|_{\Gamma}=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}-\frac{\partial f_j}{\partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i\wedge \mathrm{d}x^j.$$

若 $\boldsymbol{\Omega}\Big|_{\Gamma}=\boldsymbol{0}$，则有 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}\equiv\dfrac{\partial f_j}{\partial x^i}$. 这一条件既是必要的也是充分的. 因此 $S(\boldsymbol{x})=\displaystyle\int_0^x f_i(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x^i$ 是单值函数. 定理得证. ▌

若 $H=H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ 不显含时间 t，则有下面的定理.

定理 6.7　(1) 向量 $\nabla H=\left(\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}},-\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\right)=(\dot{\boldsymbol{x}},\dot{\boldsymbol{p}})$ 切于曲面

$$H=E_0=\text{const};$$

(2) 向量 ∇H 和切于 $H=E_0$ 的任何向量具有零数量积；

(3) 任何 n 维 Lagrange 曲面，对 $H=E_0$ 水准上在任何点 ∇H 都是切向量.

证明　向量 $\boldsymbol{\xi}$ 切于 $H=E_0$ 的充分必要条件是

$$\xi^i\frac{\partial H}{\partial y^i}=0,\quad \boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}),$$

因而

$$(\boldsymbol{\xi},\nabla H)=\xi^i g_{ij}(\nabla H^j)=\xi^i g_{ij}g^{ik}\frac{\partial H}{\partial y^k}=\xi^i\frac{\partial H}{\partial y^k}=0.$$

(1),(2)同时得证.

为了证明(3)，令 $\boldsymbol{p}$ 是 n 维 Lagrange 曲面 Γ 上的点. 处于 $H=E_0$ 水准上. 而 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n$ 是 Γ 上点 $\boldsymbol{p}$ 切空间的基向量，按照 Lagrange 曲面的条件，$(\boldsymbol{\xi}_i,\boldsymbol{\xi}_j)=0$，现考虑 ∇H，由(2) $(\nabla H,\boldsymbol{\xi}_i)=0$，因而

$$\nabla H=\sum\lambda_i\boldsymbol{\xi}_i.$$

由此，∇H 切于 Γ. 这一事实对 Γ 上任何一点都对. ▌

考虑在 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=E_0$ 水准上的任一 $n-1$ 维的 Lagrange 曲面

$\mathscr{S}^{n-1}$,从它的每一点出发有一条相空间$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$的轨线.假设由这些轨线构成的曲面是 n 维的.这时 n 维曲面 Γ^n 是 Lagrange 曲面,且处于$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=E_0$ 水准上.如果局部上曲面由 $p_i=f_i(\boldsymbol{x})=\dfrac{\partial S_0}{\partial x^i}$给出,则$S_0(\boldsymbol{x})$满足 Hamilton-Jacobi 方程

$$E_0 = H\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial S_0}{\partial \boldsymbol{x}}\right). \tag{6.1.36}$$

这时函数 $S(\boldsymbol{x},t)=\int p_i \mathrm{d}x^i$ 具有如下形式:

$$S(\boldsymbol{x},t) = -E_0 t + S_0(\boldsymbol{x}), \quad -\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\boldsymbol{x},\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}}\right).$$

§6.2 Birkhoff 系统

一、Birkhoff 方程

1927 年 G. D. Birkhoff[①] 在他的专著《动力系统》(Dynamical Systems)中最早引进了一种常微分方程组的表述形式.后人经过不断研究,把这种形式的方程组称为 Birkhoff 方程.

设有未知函数组 $a^\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$,记 $\boldsymbol{a}=(a^1,a^2,\cdots,a^{2n})$,定义 $\boldsymbol{a}$ 的函数

$$B = B(\boldsymbol{a}) \quad 和 \quad R_\mu = R_\mu(\boldsymbol{a}) \quad (\mu = 1,2,\cdots,2n).$$

B 称为 **Birkhoff 函数**,$R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$称为 **Birkhoff 函数组**,而方程组

$$\omega_{\mu\nu}(\boldsymbol{a})\dot{a}^\nu - \frac{\partial B(\boldsymbol{a})}{\partial a^\mu} = 0 \quad (\mu = 1,2,\cdots,2n) \tag{6.2.1}$$

称为 **Birkhoff 方程**,其中

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}. \tag{6.2.2}$$

---

① G. D. Birkhoff(1884—1944),美国数学家.

若令

$$\boldsymbol{\Omega} = \omega_{\mu\nu} \mathrm{d}a^{\mu} \wedge \mathrm{d}a^{\nu}, \quad \theta = R_{\mu} \mathrm{d}a^{\mu}, \tag{6.2.3}$$

则有

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{d}\theta. \tag{6.2.4}$$

Birkhoff 方程的另一种形式为

$$\dot{a}^{\upsilon} = \omega^{\mu\upsilon}(\boldsymbol{a}) \frac{\partial B(\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}} \quad (\upsilon = 1,2,\cdots,2n). \tag{6.2.5}$$

显然 $\boldsymbol{\Omega}$ 是一个二次的恰当形. 假定定义在流形 $\mathscr{M}^{2n}$ 上的 $\boldsymbol{\Omega}$ 是非退化的,因而$\{\mathscr{M}^{2n},\boldsymbol{\Omega}\}$就构成一个 Symplectic 几何形或 Symplectic 流形. 方程(6.2.5)的右端称为 **Birkhoff 向量场**. 在以 a^{μ} 为坐标时有

$$\boldsymbol{X}_B \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathrm{d}B, \tag{6.2.6}$$

其中 $\boldsymbol{X}_B = \left(\frac{\partial}{\partial a^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial a^{2n}}\right)$. 我们把$\{\mathscr{M}^{2n},\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{X}_B\}$称为 Birkhoff 自守动力系统.

如果在 Hamilton 方程

$$\begin{cases} \dot{x}^{i} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{6.2.7}$$

中,令

$$a^{\mu} = \begin{cases} q^{\mu}, & \mu = 1,2,\cdots,n, \\ p_{\mu-n}, & \mu = n+1,n+2,\cdots,2n, \end{cases} \tag{6.2.8}$$

$$(\omega^{\mu\upsilon}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \tag{6.2.9}$$

其中 $\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位矩阵,则方程(6.2.7)可以表为

$$\dot{a}^{\upsilon} = \omega^{\mu\upsilon}(\boldsymbol{a}) \frac{\partial H(\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}} \quad (\upsilon = 1,2,\cdots,2n). \tag{6.2.10}$$

可见 Hamilton 方程是 Birkhoff 方程的特殊情形,只要把 Hamilton 函数 H 看做是 Birkhoff 函数 B,把矩阵(6.2.9)看做是 $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$就可以了. 所以 Birkhoff 方程是比 Hamilton 方程更为广泛的一类方程.

现在我们提出的问题是：是否任意给了一个微分方程组

$$\dot{x}_i = f_i(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{6.2.11}$$

都可以通过适当的变换化归于 Birkhoff 方程的形式呢？回答是肯定的.

首先，Birkhoff 方程要求方程是偶数阶的. 如果 $m=2n-1$ 为奇数，则可以补充一个方程

$$\dot{x}_{2n} = 1. \tag{6.2.12}$$

我们令

$$a^\mu = \begin{cases} x_\mu, & \mu = 1,2,\cdots,2n-1, \\ t, & \mu = 2n, \end{cases} \tag{6.2.13}$$

则可以把方程(6.2.11)一般地写为

$$\dot{a}^\mu = X^\mu \quad (\mu = 1,2,\cdots,2n), \tag{6.2.14}$$

其中

$$X^\mu = \begin{cases} f_\mu, & \mu = 1,2,\cdots,2n-1, \\ 1, & \mu = 2n. \end{cases} \tag{6.2.15}$$

其次，如果已经知道了偶数阶的方程(6.2.14)，亦即已知偶数维的向量场 $\boldsymbol{X}=(X^1,X^2,\cdots,X^{2n})$，能否找到等价的 Birkhoff 方程，即把 $\boldsymbol{X}$ 表成方程(6.2.5)右端的形式？回答是肯定的.

事实上，如果能够把 $\boldsymbol{X}$ 表成方程(6.2.5)右端的形式，则有

$$X^\upsilon = \omega^{\mu\upsilon} \frac{\partial B}{\partial a^\mu},$$

即

$$\left(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon}\right) X^\mu = \frac{\partial B}{\partial a^\upsilon} \quad (\upsilon = 1,2,\cdots,2n). \tag{6.2.16}$$

这是一组以 R_μ 为 $2n$ 个未知函数的 $2n$ 个方程的一阶偏微分方程组，对于任何给定的函数 B 它都有解. 所以不管以什么形式给定的动力系统，都可以把它化归为 Birkhoff 方程的形式.

Birkhoff 方程还有它的非自治的形式，即当函数组 $R_\mu(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 和函数 B 都依赖于时间 t 时，方程可以写成

$$\omega_{\mu\nu}(\boldsymbol{a})\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial B(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}(t,\boldsymbol{a})}{\partial t} = 0 \tag{6.2.17}$$

$$(\mu = 1,2,\cdots,2n).$$

如果 $R_{\mu}(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 不显含时间 t，则上式称为**半自治的**. 在半自治的情形，Birkhoff 方程有如下的形式：

$$\omega_{\mu\nu}(\boldsymbol{a})\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial B(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}} = 0 \quad (\mu = 1,2,\cdots,2n). \tag{6.2.18}$$

对于任何非自治的动力系统，同样可以证明能够化归于 Birkhoff 方程，不过一般来说，得到的 Birkhoff 方程也是非自治的.

二、Birkhoff 方程的性质

令 $A=A(\boldsymbol{a})$，它对时间 t 求导数，按照半自治的形式(6.2.18)有

$$\dot{A}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}\dot{a}^{\mu} = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} \xlongequal{\text{记为}} \{A,B\}^{*}. \tag{6.2.19}$$

这个式子定义了**广义的 Poisson 括号** $\{\cdot,\cdot\}^{*}$. 因为 Birkhoff 张量 $\omega^{\mu\nu}$ 满足可积性条件

$$\left.\begin{aligned} &\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}, \\ &\omega^{\tau\rho}\frac{\partial\omega^{\mu\nu}}{\partial a^{\rho}} + \omega^{\mu\rho}\frac{\partial\omega^{\nu\tau}}{\partial a^{\rho}} + \omega^{\nu\rho}\frac{\partial\omega^{\tau\mu}}{\partial a^{\rho}} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.2.20}$$

由此可以推出 $\{A,B\}^{*}$ 满足 Lie 代数的条件

$$\left.\begin{aligned} &\{A,B\}^{*} + \{B,A\}^{*} = 0, \\ &\{\{A,B\}^{*},C\}^{*} + \{\{B,C\}^{*},A\}^{*} + \{\{C,A\}^{*},B\}^{*} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.2.21}$$

从这个性质可以推出 Birkhoff 方程具有类似于我们在上一节讨论的 Hamilton 方程的许多性质.

定义 6.4　如果有流形 $\mathscr{M}^{2n}$ 到 $\mathscr{M}^{2n}$ 上的映射 φ 保持 Birkhoff 动力系统 $\{\mathscr{M}^{2n},\Omega,\boldsymbol{X}_{B}\}$ 的 Symplectic 结构，即有

$$\varphi^{*}(\omega_{\mu\nu}\mathrm{d}a^{\mu}\wedge\mathrm{d}a^{\nu}) = \omega_{\mu\nu}\mathrm{d}a^{\mu}\wedge\mathrm{d}a^{\nu}, \tag{6.2.22}$$

则这个映射称为**广义正则变换**.

类似地，Hamilton 系统正则变换的许多性质也可以推广到广义正则变换上来. 例如正则变换保持 Birkhoff 方程的形式等.

可以证明，如果变换 $\varphi: \mathscr{M}^{2n}\to\mathscr{M}^{2n}$，即 $a^{\mu}\mapsto a^{\mu'}$，则这个变换是广义正则变换的充分必要条件是

$$\frac{\partial a^{\mu'}}{\partial a^{\mu}}\omega_{\mu'\nu'}\frac{\partial a^{\nu'}}{\partial a^{\nu}}=\omega_{\mu\nu}. \tag{6.2.23}$$

由此可以推出广义正则变换保持张量 Ω 的性质(6.2.20)，从而推出广义正则变换保持广义 Lie 括号的性质(6.2.23). 而且可以证明广义正则变换组成一个 Symplectic 群，即连续作两个正则变换的结果，还是一个正则变换.

一般说来，给了任意一个动力系统，虽然已证明能够把它表为 Birkhoff 方程，但是实际做起来却并不容易. 如何实际地把一个动力系统化归于 Birkhoff 方程，仍然是一个研究中的课题. 现在我们简单地举两个例子.

例 1　给了动力系统

$$\ddot{x}+x+\gamma\dot{x}=0,$$

其中 γ 为常数，要求把它化归为 Birkhoff 方程.

解　对于一个 Hamilton 系统，我们能够把它化归为 Hamilton 标准形. 易于看出，由于系统有阻尼项，显然它不是 Hamilton 系统.

令 x 为 a^1，$\dot{x}$ 为 a^2，则系统可以表为

$$\begin{cases}\dot{a}^1=a^2,\\ \dot{a}^2=-a^1-\gamma a^2.\end{cases}$$

再令

$$B=\frac{1}{2}[(a^1)^2+(a^2)^2].$$

设所化为的 Birkhoff 方程是非自治的，于是我们需要求解一阶偏微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R_1}{\partial t}=\left(\dfrac{\partial R_2}{\partial a^1}-\dfrac{\partial R_1}{\partial a^2}\right)(-a^1-\gamma a^2)-a^1,\\ \dfrac{\partial R_2}{\partial t}=\left(\dfrac{\partial R_1}{\partial a^2}-\dfrac{\partial R_2}{\partial a^1}\right)a^2-a^2.\end{cases} \tag{6.2.24}$$

设 R_2 与 a^1 无关，我们就得到第一个方程的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}a^1}{0}=\frac{\mathrm{d}a^2}{-a^1-\gamma a^2}=\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}R_1}{-a^1},$$

这组方程的通积分为

$$\begin{cases}a^1=c^1,\\(\gamma a^2+a^1)\mathrm{e}^{\gamma t}=c^2,\\R_1+a^1t=c^3.\end{cases}$$

于是方程组(6.2.24)的第一个方程的通积分可以写为

$$\Phi(a^1,(\gamma a^2+a^1)\mathrm{e}^{\gamma t},R_1+a^1t)=0.$$

我们可以取它的特殊情形

$$R_1+a^1t-\frac{1}{\gamma}(\gamma a^2+a^1)\mathrm{e}^{\gamma t}=0,$$

即有

$$R_1=\frac{1}{\gamma}(\gamma a^2+a^1)\mathrm{e}^{\gamma t}-a^1t.$$

把这个表达式代入方程组(6.2.24)并对 R_2 求解，可得

$$R_2=\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t}a^2-a^2t.$$

最后我们得 Birkhoff 方程为

$$\begin{cases}-\mathrm{e}^{\gamma t}\dot{a}^2-\mathrm{e}^{\gamma t}(\gamma a^2+a^1)=0,\\\mathrm{e}^{\gamma t}\dot{a}^1-\mathrm{e}^{\gamma t}a^2=0.\end{cases}$$

这里我们有

$$B=\frac{1}{2}[(a^1)^2+(a^2)^2],$$

$$R_1=\frac{1}{\gamma}(\gamma a^2+a^1)\mathrm{e}^{\gamma t}-a^1t,\quad R_2=\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{\gamma t}a^2-a^2t.$$

例 2　试证线性常系数 Birkhoff 系统一定是 Hamilton 系统.

证明　在一般情形下线性常系数 Birkhoff 系统可以表为方程组(6.2.5)的形式

$$\dot{a}^{\upsilon}=\omega^{\mu\upsilon}(\boldsymbol{a})\frac{\partial B(\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}\quad(\upsilon=1,2,\cdots,2n),\qquad(6.2.25)$$

其中 $\omega^{\mu\upsilon}(\boldsymbol{a})$组成常数反对称矩阵$(\omega^{\mu\upsilon})$，而 $B(\boldsymbol{a})$必为 $\boldsymbol{a}$ 的二次函

数.不妨设

$$B(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{a},$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,其元素为 A_{ij}.

这样方程组(6.2.25)就可以写为

$$\dot{a}^{\upsilon} = \omega^{\mu\upsilon}A_{\lambda\mu}a^{\lambda} \quad (\upsilon = 1,2,\cdots,2n), \tag{6.2.26}$$

把方程转置写为

$$(\dot{a}^{\upsilon})^{\mathrm{T}} = -(a^{\lambda})^{\mathrm{T}}A_{\mu\lambda}\omega^{\upsilon\mu} \quad (\upsilon = 1,2,\cdots,2n). \tag{6.2.27}$$

(6.2.26)式左乘以$(a^{\kappa})^{\mathrm{T}}A_{\kappa\upsilon}$并求和,而(6.2.27)式右乘以 $A_{\upsilon\kappa}a^{\kappa}$ 并求和,把得到的两个式子相加,考虑到矩阵的对称和反对称性质,我们就可以得到

$$(a^{\kappa})^{\mathrm{T}}A_{\kappa\upsilon}\dot{a}^{\upsilon} = 0,$$

积分得

$$(a^{\kappa})^{\mathrm{T}}A_{\kappa\upsilon}a^{\upsilon} = \mathrm{const}.$$

这个式子可以看为系统的能量守恒.我们知道守恒系统是 Hamilton 系统的本质特点. ▌

剩下的问题是:矩阵$(\omega^{\mu\nu})$能否在取适当的坐标系时化为(6.2.9)的形状?回答是肯定的,根据达布定理.也就是说,我们总可以采用适当的坐标系把线性常系数的 Birkhoff 系统化归为 Hamilton 系统的标准形式(6.2.7).

§6.3　动力系统

一、动力系统

动力系统的概念来自力学,最早使用这个名词的是 J. H. Poicaré,他在 1881 年到 1886 年间发表的重要著作《微分方程所定义的积分曲线》中,把从力学中的动力学所提出来的常微分方程组称为动力系统.随后,1917 年,G. D. Birkhoff 发表了论文《二自由

度的动力系统》，系统发展了 Poicaré 的思想，1928 年又发表了研究专著《动力系统》，从而奠定了现今数学动力系统的基础. 现在我们来引进动力系统的概念.

设有一个系统 $\mathscr{S}$，它在时刻 t 的一个状态可以由 $\boldsymbol{x}(t)$来表示，它在时刻 $t+\Delta t$ 的状态可以单值地由下式来确定：

$$\boldsymbol{x}(t+\Delta t)=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}(t),t,\Delta t), \tag{6.3.1}$$

这里 $\boldsymbol{T}$ 是算子，它可以是微分算子、积分算子、矩阵算子等等，且可以是线性的也可以是非线性的，由它确定状态从时刻 t 到下一时刻 $t+\Delta t$ 变化的过程. 在这里，Δt 可以任意取值，也可以取固定值.

如果 $\boldsymbol{T}$ 不依赖于时间 t，则上述动力系统 $\mathscr{S}$称为是**自治**的；否则，称为**非自治**的. 有时为了方便，适当将描述状态的量 $\boldsymbol{x}(t)$扩展，把非自治动力系统算子 $\boldsymbol{T}$ 中的时间 t 归并入状态 $\boldsymbol{x}(t)$ 中，这时非自治动力系统就可以看做自治动力系统，从而动力系统可以统一地记为

$$\boldsymbol{x}(t+\Delta t)=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}(t),\Delta t). \tag{6.3.2}$$

动力系统 $\mathscr{S}$的状态 $\boldsymbol{x}$ 可以看做某个空间的点. 由动力系统 $\mathscr{S}$的所有状态组成的空间 $\mathscr{X}$称为动力系统 $\mathscr{S}$的**相空间**.

动力系统 $\mathscr{S}$的状态 $\boldsymbol{x}$ 随时间的变化，经过相空间 $\mathscr{X}$的点，相空间 $\mathscr{X}$的这些点的集合构成了**相轨道**. 由于算子 $\boldsymbol{T}$ 的单值性，通过相空间的每一个点有且只有一条相轨道.

动力系统的性质由时间变量 t、算子 $\boldsymbol{T}$ 和状态变量 $\boldsymbol{x}$ 的不同情况来决定. 时间的增量 Δt 可以是连续的或是固定值，对应的动力系统的状态可以是随时间连续变化的实变函数（也可以是复函数），还可以逐步改变. 对于后一种情形可以把动力系统的状态变量 $\boldsymbol{x}$ 的时间取为整数并记为 $\boldsymbol{x}_k(k=1,2,\cdots)$，这时动力系统可以记为

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{T}_k(\boldsymbol{x}_k). \tag{6.3.3}$$

对这种情形，我们称之为**级联动力系统**.

对于 Δt 可以连续变化的情形，假设 $\boldsymbol{x}(t)$ 随 t 是充分光滑的，则可以把(6.3.1)式改写为 $\boldsymbol{x}(t)$ 对 Δt 的微商形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \tag{6.3.4}$$

这里 $\boldsymbol{F}$ 是算子. 这种提法的动力系统与动力系统(6.3.1)不同，动力系统(6.3.1)是以积分形式给出的，而现在是以微分形式给出的. 在更多的实际问题中，特别是在物理学和力学中的动力系统模型，经常是以微分的形式提出的，称为**微分动力系统**.

对于有限维的微分动力系统，设它的维数为 n，则(6.3.4)式就是一个 n 维常微分方程组，它的右端是一个向量场. 通常为了求解它，总还要给出它的初条件，即当 $t=0$ 时，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$，这时我们有解

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}_0). \tag{6.3.5}$$

解(6.3.5)可以看做在 $t=0$ 到 t 时，$\boldsymbol{x}_0$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的一个变换. 我们看到(6.3.5)就是动力系统在形式(6.3.2)下的积分表述. 也就是说，动力系统的表述(6.3.4)和(6.3.2)是等价的.

可以看出，级联动力系统可以看做微分动力系统的某种特殊情形. 今后在不加说明时，我们所讨论的动力系统就是指微分动力系统.

在物理学和力学中，描述系统 $\mathscr{S}$ 的状态 $\boldsymbol{x}$ 又可以分为离散的和连续的两大类. 对于离散的情形，$\boldsymbol{x}$ 可以表述为一个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)$；对于连续的情形，$\boldsymbol{x}$ 可以表述为一个或多个连续变量的函数，例如 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\xi,\eta,\zeta,t)$，这里 ξ,η,ζ 是三个连续的变量. 对于离散状态变量情形，动力系统就是通常的常微分方程组；对于连续状态变量的情形，动力系统就是通常的偏微分方程(组).

例 1 对于守恒的力学系统，设系统的 Hamilton 函数为 $H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$，这里 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 是描述系统状态的量，$\boldsymbol{q}$ 是广义位移向量，$\boldsymbol{p}$ 是广义动量向量，它们都是 n 维向量，合起来状态空间 $\mathscr{S}$ 是 $2n$ 维空间，或称为 $2n$ 维的流形. 这时，力学系统所服从的 Hamilton 方

程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial H}{\partial q_i},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{6.3.6}$$

这就是一个 $2n$ 维的动力系统.

例 2　在流体力学中描述黏性不可压流体运动的 **Navier-Stokes 方程**为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=-\dfrac{1}{\rho}\nabla p+\dfrac{1}{Re}\Delta\boldsymbol{u},\\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}=0,\end{cases} \tag{6.3.7}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 为流体质点的速度向量，它是质点所在的空间坐标的函数，ρ 为密度，Re 为雷诺数，∇，Δ 和 div 分别表示梯度算子、拉普拉斯算子和散度算子.

这个例子就是一个连续状态的动力系统，通常把这种系统称做**无限维动力系统**.

通过这两个例子，我们可以看到，一切力学系统都可以看做动力系统. 不仅如此，利用动力系统概念，还可以成功地处理物理问题、化学反应问题、市场变化问题、金融动态问题、交通车流问题、自动控制问题等广泛领域中的各种复杂问题. 所以它是现今各种精密科学所面对的共同问题，因而受到了普遍的关注.

二、微分动力系统所确定的流

方程(6.3.5)的解也称为方程(6.3.4)的**流**. 它构成一个从 $\boldsymbol{x}_0$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的 Lie 变换群 $\mathscr{G}$，即它满足 Lie 变换群的条件：

(1) 有单位变换：当 $t=0$ 时，

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\varphi}(0,\boldsymbol{x}_0)\in\mathscr{G}. \tag{6.3.8}$$

(2) 可以连续作变换，即定义了变换之间的一种运算：

若 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}_0)$，$\boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{\varphi}(s,\boldsymbol{x})\in\mathscr{G}$，则

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(s,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}_0))=\boldsymbol{\varphi}(s+t,\boldsymbol{x}_0)\in\mathscr{G}. \tag{6.3.9}$$

这表明，变换之间定义的这种运算对自己是封闭的.

(3) 逆变换存在：若 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}_0)$，则有它的逆变换

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{\varphi}(-t,\boldsymbol{x}) \tag{6.3.10}$$

逆变换和原变换连续作用便得到单位变换.

(4) 变换连续作用服从结合律：若 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}_0)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\varphi}(s,\boldsymbol{\varphi}(r,\boldsymbol{x}))) &= \boldsymbol{\varphi}(s+r+t,\boldsymbol{x}_0)\\ &= \boldsymbol{\varphi}(s+r,\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}_0)) = \boldsymbol{\varphi}(s,\boldsymbol{\varphi}(r+t,\boldsymbol{x}_0))\in\mathscr{G}.\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

从上面的讨论我们看出，变换(6.3.5)所构成 Lie 变换群的元素是由 t 决定的，t 取不同的值对应不同的变换，这个群称为单参数 Lie 变换群. 一个单参数群是把相空间的点沿着一条轨道作变换，时间参数 t 取不同的值时，把初始点变换到相空间这条轨道的不同点.

定义 6.5 设动力系统(6.3.5)定义在 n 维流形 $\mathscr{M}$ 上，如果有一个 $\mathscr{M}$ 的子流形 $\mathscr{V}$，使在动力系统(6.3.5)中，把 $\boldsymbol{x}_0$ 取在 $\mathscr{V}$ 内时，$\boldsymbol{x}$ 也总是在 $\mathscr{V}$ 内，则称 $\mathscr{V}$ 为动力系统(6.3.5)的**不变流形**.

显然，在点 $\boldsymbol{x}_0$ 给定时，过点 $\boldsymbol{x}_0$ 由方程(6.3.5)所确定的在 $\mathscr{M}$ 中的曲线是 $\mathscr{M}$ 的一维不变流形.

有时，在许多动力系统中，时间限制在 $t>0$，这时在对应的 Lie 群 $\mathscr{G}$ 中逆变换不存在，这种情形我们得到的是一个从 $\boldsymbol{x}_0$ 到 $\boldsymbol{x}$ 的不可逆变换的单参数集合，我们称之为**半群**.

对于状态空间是连续的情形，讨论稍为复杂一点. 我们一般得到的是无限维变换群.

当解(6.3.5)与时间 t 无关时，在时间过程中，系统的状态始终停留在 $\boldsymbol{x}_0$ 点. 这时相空间的轨道退化为一个点. 在这种情况下，我们称这个点为流的**不动点**. 不动点对应于微分动力系统(6.3.4)的平衡解，即当方程(6.3.4)右端的向量在这点退化为零时，有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}, \tag{6.3.12}$$

这个方程的解就对应于平衡解，也就是流的不动点. 不动点也称为

向量场 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 的**奇点**. 对于向量场不为零的那些点，我们称之为**正则点**.

动力系统的平衡解在讨论动力系统的性质时起着十分重要的作用.

例 3　考虑微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1,\end{cases}$$

其初始条件为：当 $t=0$ 时，$(x_1, x_2)|_{t=0} = (x_{10}, x_{20})$. 则其解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{x}_0). \qquad (6.3.13)$$

(6.3.13)式定义了平面上的旋转.

在(6.3.13)式中如果 t 取离散值，例如令 $t_j = \frac{2j\pi}{N}(j=0,1,2,\cdots,N-1)$，则 $\boldsymbol{\varphi}(t_j, \boldsymbol{x})$ 定义了旋转 $\frac{2j\pi}{N}$ 角度的变换，它组成了平面上有限旋转群 $\mathscr{G}$，共有 N 个元素.

对于初值为 $(x_1, x_2)|_{t=0} = (0,0)$ 的情形，方程(6.3.13)的解为 $(0,0)$. 这就是它的平衡解，也就是流的不动点，它对应于(6.3.13)右端等于零向量时的解.

三、随参数变化的动力系统

有时我们不仅要讨论单个的动力系统，还要讨论一系列的动力系统. 也就是说，我们的动力系统可以依赖于一个或多个参数，在参数变化时动力系统也发生变化. 例如，在前面我们举的例 2 中，流体的密度 ρ 和雷诺数 Re 就可以看为参数. 在这种情形，我们可以把动力系统一般地写为

$$\boldsymbol{x}(t+\Delta t) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}(t), \lambda, \Delta t), \qquad (6.3.14)$$

或记为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \lambda), \qquad (6.3.15)$$

这里λ一般可以是一个实参数、一个实分量的向量，也可以是一个依赖于$\boldsymbol{x}(t)$的函数或泛函. 对后一种情形，一般地就是一个控制反馈问题. 在我们今后的讨论中，一般只考虑前两种情况，即λ是实参数或实分量的向量的情形.

从力学系统的角度来看，动力系统中包含的参数可以是长度、角度等几何量，也可以是力、速度、位移、变形、质量、密度等力学量，还可以是温度、电场强度、磁场强度等物理量，或者是这些不同量的组合或它们的函数.

§6.4 动力系统的等价和等价类

一、动力系统的等价

定义 6.6 设函数$R(\cdot,\cdot)$: $\mathscr{X}\times\mathscr{X}\to\{0,1\}$，如果$R(x,y)=1$，则称$x$**等价于**$y$；如果$R(x,y)=0$，则称$x$**不等价于**$y$. 通常我们把$R(x,y)=1$的情形，即$x$等价于$y$的情形记做$xRy$.

上面定义的xRy关系满足：

(1) 反身性：xRx对属于$\mathscr{X}$的任何x都成立；

(2) 对称性：只要xRy，就有yRx；

(3) 传递性：若xRy和yRz，则有xRz.

设R是定义在集合$\mathscr{X}$上的等价关系，x是$\mathscr{X}$中的元素，则可以用$E(x;R)$表示所有在$\mathscr{X}$中与x等价的元素所组成的集合. 这一集合$E(x;R)$称为x对等价关系R的**等价类**. 等价类有以下的性质：

(1) 每个等价类都是非空的，因为xRx，而x是属于集合$E(x;R)$的.

(2) 令x,y都是$\mathscr{X}$的元素. 由于等价关系R的对称性，当且仅当x属于$E(y;R)$时，y属于$E(x;R)$.

(3) 令x,y都是$\mathscr{X}$的元素，则等价类$E(x;R)$和$E(y;R)$要么是相同的，要么没有公共元素.

由以上性质可知，集合 $\mathscr{X}$ 中的任何元素 x 属于且只能属于一个等价类；当且仅当 x 和 y 属于同一个等价类时 xRy；等价类把 $\mathscr{X}$ 划分一系列互不重合的子集合.

例如，在整数集合$\mathbb{Z}$中，如果定义等价关系 xRy 为两个数 x,y 能够被 2 整除，于是$\mathbb{Z}$就划分为奇数和偶数两个等价类. 令 n 为某大于 1 的整数，我们知道，对于任何 $x\in\mathbb{Z}$，总可以唯一地表为 $x=qn+r$，其中 q,r 为整数，且 $0\leqslant r\leqslant n-1$. 如果定义等价关系 R_n 为 xR_nr，这个等价关系称为**以 n 为模的同余**，等价类是 $0,1,2,\cdots,n-1$ 等 n 个元素代表的 $E_0,E_1,E_2,\cdots,E_{n-1}$. 显然，当 $n=2$ 时，我们得到的等价类就是前面奇数、偶数的等价类.

在讨论动力系统的问题时，我们同样要问两个动力系统是否等价. 和上面关于整数集合划分等价类的方法不同，在动力系统中，等价类可以以不同的方法来定义. 在这一节，我们要讨论在动力系统中几种常遇到的等价类.

对于动力系统来说，它的等价关系可以定义如下：

定义 6.7　设在向量空间的区域 $\mathscr{U}$ 上给了两个动力系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \tag{6.4.1}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}), \tag{6.4.2}$$

它们相应的流是

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}_0) \tag{6.4.1$'$}$$

和

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{y}_0). \tag{6.4.2$'$}$$

如果我们给了在两个动力系统的变量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的变换群 H，在 H 中存在一个变换

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}), \tag{6.4.3}$$

在这个变换下，动力系统(6.4.1)和(6.4.2)或它们相应的流(6.4.1)′和(6.4.2)′具有相同的形式，即$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))$和动力系统(6.4.1)相同，亦即

$$\left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}\right)^{-1}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \tag{6.4.4}$$

或

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})), \tag{6.4.5}$$

则称两个动力系统在变换 H 下是**等价**的.

由以上定义看出，在动力系统之间的等价关系 R 是和所给的变换类 H 密切相关的. 我们可以有不同的动力系统类，也可以有不同的变换类 H，它们就决定了不同的动力系统的等价类. 例如，我们可以有线性变换类、光滑变换类、连续变换类（即拓扑变换类）等，它们决定了动力系统不同的等价类，其中拓扑变换类是最为普遍的变换类，对于它决定的等价关系也讨论得较多.

显然，动力系统的不变流形在拓扑变换下仍然变为动力系统的不变流形，也即不变流形是动力系统在拓扑变换之下的不变性质.

另外，我们知道，变换类 H 还和它所定义的区域有关. 例如，变换可以定义在一点的邻域，也可以定义在动力系统所定义的整个流形上. 所以动力系统的等价又可以有局部和全局的区别.

前面提到过，若动力系统(6.4.1)的右端向量 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}$ 不为零，则点 $\boldsymbol{x}$ 称为该动力系统的正则点；否则，称为动力系统的奇点. 下面我们给出动力系统在正则点邻近拓扑变换下的等价定理.

定理 6.8　设动力系统(6.4.1)在点 $\boldsymbol{p}$ 为正则的，则在点 $\boldsymbol{p}$ 的某邻域 $\mathscr{U}$ 上这个动力系统等价于动力系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{e},$$

这里 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量$(1,0,\cdots,0)$.

证明　由于 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{0}$，所以不妨设它的第一个分量 $f_1(\boldsymbol{x})$ 不为零. 这时，对于初条件 $\boldsymbol{x}_0=(0,x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$，可以得到过 $\boldsymbol{x}_0$ 的解

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0).$$

显然，当 $t=0$ 时，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$. 变换 $u_1=x_1, u_i=x_{i0}\ (i=2,3,\cdots,n)$ 给出了从 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{u}$ 的变换. 在这个变换下，有

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=f_1,\quad \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=0\ (i=2,3,\cdots,n).$$

再令 $y_1=\int_0^{u_1}\frac{\mathrm{d}u_1}{f_1}$,就有

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=1,\quad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=0\quad (i=2,3,\cdots,n).$$

这表明,从 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{u}$ 再到 $\boldsymbol{y}$ 的坐标变换,使在新变量 $\boldsymbol{y}$ 之下动力系统有如上的形式.而这就是所要证明的. ▌

以上的结论说明,对于动力系统的正则点邻近,在连续变换下,所有的系统都是等价的.因此,这种等价类是简单的,无需进一步研究.下面我们要着重讨论动力系统在奇点邻近的等价问题.

二、线性动力系统在奇点邻近的等价

假定 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是我们所考虑的动力系统的奇点,并且假定动力系统是线性系统.对于有限维的情形,我们有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\tag{6.4.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},\tag{6.4.7}$$

这里 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶实数矩阵,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 n 维向量.我们现在来讨论它们的等价问题.

前面我们说过,动力系统的等价和所给的变换类 H 密切相关.通常我们所遇到的变换类有线性变换和连续性变换,这两类变换对应于线性等价和拓扑等价.显然线性等价的动力系统也一定是拓扑等价的,因为线性变换也是连续的.

对于线性变换,设我们给了 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 之间的线性变换

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{x}\tag{6.4.8}$$

这里 $\boldsymbol{L}(t)$ 是 n 阶非退化的矩阵.在这个变换下,(6.4.6)与(6.4.7)等价的条件是

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{L}^{-1}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

即
$$L^{-1}BL-L^{-1}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=A. \tag{6.4.9}$$
在特别情形，当 L 与时间无关时，上式左端的第二项为零，即有
$$L^{-1}BL = A. \tag{6.4.9$'$}$$
这时等价的条件就是矩阵 A 和 B 的相似条件.

现在，我们引进以下定理：

定理 6.9 两个 n 阶的线性动力系统线性等价的充分必要条件是，它们矩阵有相同的约当块，而且对应约当块的特征值具有相同的实部.

证明 设我们讨论的线性动力系统是(6.4.6)和(6.4.7)，由(6.4.9)式知，在对未知向量作与时间无关的线性变换时，对应的矩阵作相似变换. 我们可以通过未知向量的线性变换，分别把它们变换为各自的约当标准形. 显然当它们的约当标准形相同时，它们是线性等价的. 现在的问题是：如果只是约当块的特征值的实部相同，它们是否等价？

由于每一约当块所对应的方程与方程组的其余方程没有耦合，所以可以对一个约当块来讨论. 不妨设有两个线性动力系统
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = J\boldsymbol{x}, \tag{6.4.10}$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = J^{*}\boldsymbol{y}, \tag{6.4.11}$$
其中 $J=\alpha I+H, J^{*}=(\alpha+\mathrm{i}\beta)I+H$，$\alpha,\beta$ 为实数，I 为 m 阶单位矩阵，而
$$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$
我们可以把动力系统(6.4.10)和(6.4.11)的解分别表示为
$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{Jt} = I + Jt + \frac{1}{2!}J^{2}t^{2} + \frac{1}{3!}J^{3}t^{3} + \cdots,$$

$$y(t) = e^{J^* t} = I + J^* t + \frac{1}{2!}J^{*2}t^2 + \frac{1}{3!}J^{*3}t^3 + \cdots.$$

显然，$y(t) = e^{i\beta I t}x(t)$. 令 $e^{i\beta I t}$ 为矩阵 $L(t)$，则有 $y = L(t)x$. 将这个变换代入动力系统(6.4.11)，两边消去 $e^{i\beta I t}$，就得到动力系统(6.4.10). 这就证明了动力系统(6.4.10)和(6.4.11)是线性等价的. 由此可以推出，具有相同的约当标形的矩阵，其特征值任意改变虚部，所对应的线性动力系统还是线性等价的. ▍

现在我们进一步讨论线性动力系统的拓扑等价问题. 为此，设动力系统(6.4.6)和(6.4.7)中的矩阵 A 和 B 都没有零实部的特征值. 这时，我们把奇点 $x = 0$ 和 $y = 0$ 称为**双曲奇点**. 我们有下面的定理.

定理 6.10 若线性动力系统(6.4.6)和(6.4.7)在零点都是双曲奇点，且它们对应矩阵的正负实部特征值的个数相同，则它们是拓扑等价的.

由于线性等价的动力系统也一定拓扑等价，我们就可以利用前面已经得到的结果，将提法稍为改变，去对一个具有非零特征值的约当块的动力系统(6.4.10)来证明.

定理 6.11 设在线性动力系统(6.4.10)中，实特征值 $\alpha \neq 0$，则它等价于动力系统

$$\dot{y}_i = \sigma y_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{6.4.12}$$

这里

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ -1, & \alpha < 0. \end{cases}$$

证明 首先对动力系统(6.4.10)作线性变换

$$w = Cx, \tag{6.4.13}$$

这里 C 是 m 阶对角矩阵 $C = \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^{m-1})$. 在这个变换下，动力系统(6.4.10)就成为

$$\dot{w} = \tilde{J}w, \tag{6.4.14}$$

其中

$$\tilde{J}=C^{-1}JC=\alpha(I+H). \tag{6.4.15}$$

现在引进非线性变换

$$w = h(z) = e^{Hs}z \ (z \neq 0), \quad h(0) = 0, \tag{6.4.16}$$

这里

$$s = \ln\sqrt{z^T z} = \ln\sqrt{\sum_{i=1}^{m} z_i^2}. \tag{6.4.17}$$

把(6.4.16)式代入(6.4.14)式消去 e^{Hs} 就得到

$$\dot{z} = \alpha(I + H)z - \dot{s}Hz, \tag{6.4.18}$$

由此得

$$z^T\dot{z} = \alpha z^T(I+H)z - \dot{s}z^T Hz.$$

考虑到 $\dot{s}=\dfrac{z^T\dot{z}}{z^T z}$，上式中 $z^T\dot{z}=z^T z\dot{s}$，于是上式可以化为

$$(\alpha - \dot{s})z^T(I + H)z = 0.$$

由于当 $z\neq 0$ 时 $z^T(I+H)z\neq 0$，所以 $\dot{s}=\alpha$. 把它代入(6.4.18)便得

$$\dot{z} = \alpha z. \tag{6.4.19}$$

再令 $z_i=\mathrm{sgn}y_i\,|y_i|^{|\alpha|}$，则(6.4.19)最后化归为

$$\dot{y} = (\mathrm{sgn}\alpha)y. \tag{6.4.20}$$

定理得证. ▌

(6.4.16)式所表示的变换是一对一的. 对此只要验证矩阵 $\dfrac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}z}$ 的行列式不为零即可. 读者可以参阅周鲲、武际可关于线性系统拓扑分类定理的初等证明(北京大学学报(自然科学版)第 32 卷，第 5 期，第 577—584 页，1996 年).

由以上的讨论知，两个线性动力系统，只要它们的矩阵特征值的正负实部个数相同，它们就是等价的，最后等价于最简单的线性动力系统(6.4.20).

由(6.4.20)式可以看出，在 $\alpha>0$ 时，方程(6.4.19)中相应的分量从初始值向无穷运动；当 $\alpha<0$ 时，方程(6.4.19)中相应的分量从初始值开始趋向于零.

如果线性动力系统对应的矩阵特征值的实部全都小于零，则系统的每一个分量都趋向于零，这时我们称奇点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是**稳定平衡点**；如果有一个特征值的实部是大于零的，我们称奇点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是**不稳定平衡点**. 实际上，稳定平衡和不稳定平衡，也是在奇点邻近的两种重要的等价类.

如果线性动力系统对应的矩阵有 p 个特征值的实部是小于零的，有 q 个特征值的实部是大于零的($p+q=n$)，则我们称在奇点邻近的 n 维空间有 p 维是稳定的，有 q 维是不稳定的. 初值所在的点，若随后运动趋于奇点，则称为属于稳定流形的点；否则，称为属于不稳定流形的点. 从上面的讨论我们知道，稳定流形和不稳定流形的维数，就是线性动力系统拓扑等价的指标，线性动力系统就是按它们的维数来区分为不同的等价类的. 在以上结果的基础上，我们引进双曲奇点的概念.

定义 6.8 如果动力系统在奇点邻近展开的矩阵特征值实部不为零，则这个奇点称为**双曲奇点**.

三、非线性动力系统在奇点邻近的等价

设 $\boldsymbol{x}^*$ 是动力系统的奇点，不妨设 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{0}$ (因为可以作变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 就是新的奇点)，即 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{0}$ 是动力系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的奇点，我们有 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$. 这时，由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的可微性，可以将它在奇点附近展开，即有

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}, \tag{6.4.21}$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})=O(\|\boldsymbol{x}\|)$ 也是一个矩阵，在 $\|\boldsymbol{x}\|$ 充分小时，$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ 也充分小.

在上一小节中我们得到结论说，当(6.4.21)式中的余项为零，而且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的实部不为零时，动力系统可以等价于动力系统(6.4.20). 现在我们问：在余项 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ 不为零时，动力系统(6.4.21)是否还能等价于动力系统(6.4.20)？回答是肯定的. 为此，我们引入下述定理.

定理 6.12 如果在动力系统(6.4.21)中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 l 个正实部的特征值，m 个负实部的特征值($l+m=n$)，则在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的充分小的邻域内，动力系统(6.4.21)等价于

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}, \tag{6.4.22}$$

这里 $\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵

$$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{l个},\underbrace{-1,-1,\cdots,-1}_{m个}). \tag{6.4.23}$$

证明 根据上一小节的结论，可以对动力系统(6.4.21)作线性变换，使它等价于

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}. \tag{6.4.24}$$

经过这个线性变换，余项 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$ 的量阶不会改变.

我们的问题是：是否能找到一个变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 使动力系统(6.4.24)变为动力系统(6.4.22)?

显然，在余项 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}$ 为零时，(6.4.24)和(6.4.22)就是相同的动力系统，我们有恒等变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}$ 把两个系统中的一个变为另一个.

现在假定找到的变换是

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x}). \tag{6.4.25}$$

我们的问题就是求 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})$，使得满足变换要求的条件.

动力系统(6.4.24)对应的流满足

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{D}t+\int_0^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}t}, \tag{6.4.26}$$

而动力系统(6.4.22)的解是

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\psi}(t,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{y}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{D}t}, \tag{6.4.27}$$

两个系统等价的条件是

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})),\quad 即\quad \boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\psi}\circ\boldsymbol{h}. \tag{6.4.28}$$

将(6.4.25)，(6.4.26)，(6.4.27)三式代入上式，我们有

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{D}t+\int_0^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}t})+\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x}_0\mathrm{e}^{\boldsymbol{D}t+\int_0^t \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}t})=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x}_0))\mathrm{e}^{\boldsymbol{D}t}. \tag{6.4.29}$$

上面这个方程是关于未知函数 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})$ 的函数方程，求解它比较困难. 为了证明 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})$ 的存在，我们直接把变换(6.4.25)代入动力系统(6.4.22)，并考虑到动力系统(6.4.24)就会得到关于 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})$ 的偏微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} + \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x})$$
$$= \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})).$$

如果记 $\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$，则上面的方程化为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{D}\boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{D}\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \tag{6.4.30}$$

这是 n 个形为

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} a_j(\boldsymbol{x}) - d_i \chi_i + a_i(\boldsymbol{x}) - d_i x_i = 0$$

的线性非齐次偏微分方程，要求 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})$ 满足条件 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，其中的 d_i 是 1 或 −1，依它在对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 中的位置而定. 根据一阶偏微分方程的理论，方程(6.4.30)的解 $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x})$ 总是存在的. 这就是所要证明的. ▌

有了上面的定理，我们可以得出如下的重要推论：

定理 6.13 两个维数相同，且在奇点展开的 Jacobi 矩阵的特征值均有非零实部的自治动力系统，在奇点邻域是等价的，当且仅当它们的正负实部特征值的个数相同.

这个定理也称为 **Hartman-Grobman 定理**. 它说明在动力系统的双曲奇点邻近，动力系统和它的微小扰动系统是拓扑等价的. 它是动力系统在奇点邻近等价性质的重要定理.

四、非自治系统的等价

前面讨论的等价问题都是对自治系统来说的，对非自治系统，情况比较复杂. 设给了非自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}). \tag{6.4.31}$$

最早讨论这个问题的是 J. H. Lyapunov，他提出问题：在怎样的变换

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{y}) \tag{6.4.32}$$

之下，非自治系统(6.4.31)化为

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \left(\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{h}}{\mathrm{D}\boldsymbol{y}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})) - \frac{\partial h}{\partial t}\right) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})? \tag{6.4.33}$$

这里 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})$是不依赖于时间 t 的，即在变换(6.4.32)之下非自治系统(6.4.31)化为自治系统(6.4.33). Lyapunov 发现并不是所有的非自治系统都可以通过变换化为自治系统. 例如，对动力系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(t),$$

在 $\boldsymbol{F}(t)$不是常数时，变换(6.4.32)就不能把它化为自治系统. Lyapunov 把能通过变换化为自治系统的非自治动力系统称为**可归约的系统**.

一般地来讨论化为自治系统的问题，是非常复杂的，通常总是从线性的动力系统来讨论.

首先，我们考虑把线性动力系统的方程组变量加以扩展，从向量 $\boldsymbol{x}$ 扩展去讨论一个矩阵 $\boldsymbol{X}$. 考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X} \tag{6.4.34}$$

和方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{Y}. \tag{6.4.35}$$

现在让我们把以前讨论过的向量之间的变换(2.2.3)扩展为张量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 之间的变换

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{Y}. \tag{6.4.36}$$

设矩阵函数 $\boldsymbol{L}(t)$满足条件：

(1) 在区间$(t_0, +\infty)$上具有连续的导数；

(2) 在区间$(t_0, +\infty)$上行列式$|\boldsymbol{L}(t)^{-1}|$有界；

(3) $\boldsymbol{L}(t)^{-1}$存在，而且行列式$|\boldsymbol{L}(t)^{-1}|$有界.

我们把满足上述条件的变换(6.4.35)称为 **Lyapunov 变换**. 在这个变换下方程(6.4.34) 化为方程(6.4.35),则 $L(t)$要满足类似于(6.4.9)式的方程

$$B = L^{-1}AL - L^{-1}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}. \tag{6.4.37}$$

在非自治的线性动力系统中,最重要的一类系统是周期系数的情形. Lyapunov 指出这类系统是可归约的,即可以通过变换(6.4.36)化为常系数的系统. 我们有下述定理:

定理 6.14　动力系统(6.4.34)是可归约的充分必要条件是它的解系可以写成

$$X = L(t)\mathrm{e}^{Ct}.$$

其中 C 为常矩阵.

定理的结论是不难证明的,所以我们把它留给读者.

定理 6.15　设动力系统(6.4.34)中的矩阵 $A(t)$是以 ω 为周期的矩阵函数,则存在 $L(t)$使在变换(6.4.36)下系统(6.4.34)化为自治系统.

证明　因为 $A(t)$的周期性,所以有

$$A(t+\omega) = A(t).$$

把它代入方程(6.4.34)得到

$$\frac{\mathrm{d}X(t+\omega)}{\mathrm{d}t} = A(t)X(t+\omega).$$

因为 $X(t+\omega)$和 $X(t)$都是方程(6.4.34)的解,它们都是线性无关的解组,所以可以相互线性表出,即有

$$X(t+\omega) = X(t)V, \tag{6.4.38}$$

这里 V 是非退化的实常数矩阵.

我们定义矩阵 $V^{\frac{t}{\omega}} = \mathrm{e}^{\frac{t}{\omega}\ln V}$,进而取

$$L(t) = X(t)V^{\frac{t}{\omega}} = X(t)\mathrm{e}^{\frac{t}{\omega}\ln V},$$

它也是以 ω 为周期的矩阵函数,而且满足上面对 Lyapunov 变换的三条要求. 把上述 $L(t)$代入(6.4.36)式可以得到变换后的系统为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{1}{\omega}\ln\boldsymbol{V}\right)\boldsymbol{Y}, \tag{6.4.39}$$

括号中的矩阵是常数矩阵. 这就是要证明的. ▌

在实际问题中,特别是讨论动力系统的等价问题时,经常要计算(6.4.39)式中矩阵$\frac{1}{\omega}\ln\boldsymbol{V}$的特征值. 这时,更为直接的是去计算矩阵$\boldsymbol{V}$的特征值,然后根据$\frac{1}{\omega}\ln\boldsymbol{V}$的特征值和$\boldsymbol{V}$的特征值之间的关系得到前者的特征值. 现在我们就来给出这两者特征值之间的关系.

令矩阵$\boldsymbol{V}$的特征值为λ,矩阵$\frac{1}{\omega}\ln\boldsymbol{V}$的特征值为$\mu$. 根据特征值的定义,我们有

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}, \tag{6.4.40}$$

$$\frac{1}{\omega}\ln\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}=\mu\boldsymbol{X}. \tag{6.4.41}$$

由于$\frac{1}{\omega}\ln\boldsymbol{V}=\frac{1}{\omega}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{V}+\frac{\boldsymbol{V}^2}{2}-\frac{\boldsymbol{V}^3}{3}+\cdots\right)$,所以由(6.4.41)式有

$$\frac{1}{\omega}\boldsymbol{I}\boldsymbol{X}=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{X},$$

$$-\frac{1}{\omega}\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}=-\frac{1}{\omega}\lambda\boldsymbol{X},$$

$$\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{V}^2}{2}\boldsymbol{X}=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\lambda^2}{2}\boldsymbol{X},$$

$$-\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{V}^3}{3}\boldsymbol{X}=-\frac{1}{\omega}\cdot\frac{\lambda^3}{3}\boldsymbol{X},$$

…………

将这些式子求和我们就得到

$$\frac{1}{\omega}\ln\boldsymbol{V}\boldsymbol{X}=\frac{1}{\omega}\ln\lambda\boldsymbol{X}.$$

把这个式子与(6.4.41)式对比,就可以得到它们特征值之间的关系

$$\mu = \frac{1}{\omega}\ln\lambda. \tag{6.4.42}$$

我们知道，对于讨论动力系统的等价类，特征值实部的符号起着关键作用. 由(6.4.42)式，又由于 $\mathrm{Re}(\ln\lambda)=\ln|\lambda|$，所以 $|\lambda|>1$ 对应于 $\mathrm{Re}(\mu)>0$.

五、动力系统的稳定性

前面我们讨论了动力系统在平衡点邻近的等价问题，按照等价关系，可以把动力系统在平衡点邻近的运动行为分为等价类. 其实，在平衡点邻近动力系统的运动行为最重要的是稳定与否，按照稳定和不稳定，动力系统在平衡点邻近可以分为两大类. 前者称平衡是稳定的，后者称平衡是不稳定的. 现在我们按照 Lyapunov 的方法来给出稳定性的严格定义.

设给了动力系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}), \tag{6.4.43}$$

假定它在初条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 下，有解 $\boldsymbol{x}_0(t)$，在另一初条件 $\boldsymbol{x}(t_0)=\tilde{\boldsymbol{x}}_0$ 下，有解 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$. 我们定义在 t 时刻两个解的距离：

$$\rho(t) = \rho(\boldsymbol{x}_0(t),\tilde{\boldsymbol{x}}(t)) = \sqrt{(\boldsymbol{x}_0(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}(t))^2}, \tag{6.4.44}$$

则在 t_0 时刻两个解的距离为

$$\rho_0 = \rho(t_0) = \rho(\boldsymbol{x}_0(t_0),\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)) = \sqrt{(\boldsymbol{x}_0-\tilde{\boldsymbol{x}})^2}. \tag{6.4.45}$$

定义 6.9　设动力系统(6.4.43)在初始条件 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\tilde{\boldsymbol{x}}_0$ 下，分别有解 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$. 如果对于任给的实数 $\varepsilon>0$，都存在一个 $\delta>0$，只要 $\rho_0<\delta$，就恒有 $\rho(t)<\varepsilon$ 对所有的 t 都成立，则称 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 是**稳定**的或 **Lyapunov 稳定**的；如果存在 $\delta>0$，只要 $\rho_0<\delta$ 时，就有

$$\lim_{t\to+\infty}\rho(t) = 0,$$

则称 $\boldsymbol{x}_0(t)$ 是**渐近稳定**的.

为了方便，在一般讨论时，不妨取 $t_0=0$. 我们还引进变换

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{x}_0(t), \tag{6.4.46}$$

初条件也有相应的变换

$$\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}_0. \tag{6.4.47}$$

把(6.4.46)式代入动力系统(6.4.43)得到

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0(t)\xlongequal{\text{记为}}f(t,\boldsymbol{y}). \tag{6.4.48}$$

显然 $\boldsymbol{y}(t)\equiv\boldsymbol{0}$ 是上述方程的解，亦即零点是上述方程的奇点或平衡点. 于是我们在前面讨论过的一切在动力系统平衡点邻近的等价问题，都可以完全用来对上述方程进行讨论.

根据前面得到的结论，一个动力系统在奇点邻近的行为可以由它在奇点附近线性展开的性质来决定. 在自治系统时，展开的主要线性项是常数矩阵和未知向量的积，而系统的等价类决定于系数矩阵特征值实部的正负. 由定理6.12的结果，拓扑变换可以化归为标准形(6.4.22). 对于标准形的各方程，在右端为正时平衡解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 的任何扰动解都会无限增长，所以平衡解是不稳定的. 也就是说，只要系数矩阵有任何一个特征值的实部大于零，平衡解就是不稳定的. 只有在系数矩阵全部特征值的实部都小于零时，平衡解才是稳定的.

对于非自治系统，若右端项的系数矩阵是周期的，根据前面§4.4的讨论，我们的问题归结于计算在(6.4.38)式中的矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的特征值. 在 $\boldsymbol{V}$ 的特征值的绝对值全都小于零时，系统的平衡解是稳定的，只要有一个特征值的绝对值大于零，平衡解就是不稳定的.

总结以上的讨论，动力系统的稳定性也是在平衡下的一种拓扑等价性质，即在拓扑变换下平衡解是稳定的动力系统还保持为稳定的，而平衡解是不稳定的则动力系统保持为不稳定的.

对于线性动力系统这种重要的情形，我们来引进一个定理. 我们知道这种动力系统的稳定性归结于矩阵特征值是否在左半平面上，也就是归结于判断一个实系数多项式的根什么条件下全部处于左半平面上.

定理 6.16(Routh-Hurwitz 准则) 设给了关于 p 的实系数多项式

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}+a_n=0\quad(a_0>0), \tag{6.4.49}$$

它的全部根处于复平面的左半平面的充分必要条件是下列不等式成立：

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2i-1} & a_{2i-2} & a_{2i-3} & \cdots & a_i \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots. \tag{6.4.50}$$

我们略去证明，对证明有兴趣的读者可以参考 A. G. Kurosh 的《高等代数教程》.

§6.5　什么是分岔

一、分岔的定义

在§6.3中我们讨论了随参数变化的动力系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}), \tag{6.5.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 为算子，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^m$（称 $\boldsymbol{\lambda}$ 为参数空间）. 设动力系统(6.5.1)具有奇点 $\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{\lambda})$，即有

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{0}. \tag{6.5.2}$$

由于(6.5.2)式含有 n 个方程，它的解 $\boldsymbol{x}_0$ 实际上是在空间$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$中的 m 维流形 $\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{\lambda})$. 当 $m=1$ 时，它是空间$(\boldsymbol{x},\lambda)$的一条曲线. 下面假定$m=1$.

设动力系统(6.5.1)定义在奇点 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域内，并且我们记

$$\boldsymbol{A}(\lambda) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{x=x_0} \tag{6.5.3}$$

设方程(6.5.1)所有的在点 $\boldsymbol{x}_0$ 邻域的解组成的集合 $\mathscr{X}$ 可以分为等

价类$E_1,E_2,E_3,\cdots$，即 $\mathscr{X}=E_1\cup E_2\cup\cdots$，而且 $E_i\cap E_j=\varnothing\ (i\neq j)$.

我们有关于动力系统(6.5.1)分岔的定义：

定义 6.10　设存在 λ 的某个点 λ_0，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在不同的 λ_1 和 λ_2，使

$$|\lambda_i-\lambda_0|<\varepsilon\quad(i=1,2),$$

而且对应有方程(6.5.1)的两个解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)$，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1,\lambda_1),$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_2(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2,\lambda_2).$$

如果解 $\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t)$分别属于不同的等价类，则称 λ_0 为动力系统(6.5.1)的一个**分岔点**.

由上可见，分岔是和动力系统的等价的分类相联系的，不同的等价定义就可以有不同的分岔. 不过，有些动力系统的等价定义使等价类过分多，以致讨论基于它之上的分岔是没有多大意义的. 在上一节我们讨论过一些不同的动力系统等价，例如，其中我们提到过对于线性动力系统来说，联系于线性变换所构成的等价类. 按照这种等价分类，动力系统右端项矩阵的不同约当标准形，就对应于不同的等价类. 如果按照这种等价类来确定分岔，则 λ 的任何值的邻近，都有解的无穷多不同的等价类，即任何点都是分岔点. 这样分类当然就意义不大了. 所以，在讨论分岔时，我们要求等价类一般是离散的，即等价类的数目是有限类的，或者是无限的但是是可数的. 在上一节中，我们讨论的拓扑等价类，把动力系统分为两类，即拓扑等价和不等价两大类. 对稳定的等价分类也是把动力系统分为稳定和不稳定两大类. 所以这种等价分类是符合我们对分岔讨论要求的. 在有些书中，定义分岔就是针对拓扑等价来讨论的. 在实际问题中，我们经常还会遇到其他的等价类，要根据这些等价类来讨论相应的分岔问题.

现在我们考虑在动力系统(6.5.1)中，在奇点 $\boldsymbol{x}_0$ 处矩阵(6.5.3)

的特征值的实部都不为零,即奇点为双曲奇点. 这时由定理 6.10,动力系统在右端项的任意小扰动下还是等价于在奇点线性化了的动力系统. 显然,当 λ 作小的改变时,由于 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\lambda)$ 的连续性,也是对 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\lambda)$ 作小扰动,自然还是拓扑等价于未扰动的线性系统. 所以我们有下面的定理.

定理 6.17 动力系统的双曲奇点不是拓扑等价条件下的分岔点.

从这个定理我们知

$$\mathrm{Re}(\mathrm{Eig}(\boldsymbol{A}(\lambda))) = 0, \tag{6.5.4}$$

这里 Re 是取实部,Eig 是特征值. 上式就是动力系统在拓扑等价下的分岔条件.

(6.5.4)式又可以有两种特殊情况,一种是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 只有实特征值,这时特征值的实部为零的条件就是 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 有零特征值的条件,即

$$\mathrm{Eig}(\boldsymbol{A}(\lambda)) = 0. \tag{6.5.5}$$

这种情形也称为动力系统的**静分岔**. 还有一种情形是(6.5.4)式成立,不过特征值是单重特征值,这时从平衡解开始系统产生了一个周期解. 这种分岔称为 **Hopf 分岔**,它是由德国数学家 E. Hopf 首先发现而得名的. 在下一节我们还要专门讨论这种分岔.

(6.5.4)式提供给我们关于动力系统运动行为的信息,其实是很复杂的. 我们只是证明过,当系统线性化后,矩阵特征值实部不为零时,非线性扰动和线性系统是拓扑等价的. 而特征值实部为零时它的等价问题就十分复杂,因为不同阶的非线性项就会起作用. 我们把在空间 $(\boldsymbol{x},\lambda)$ 中满足条件(6.5.2)和(6.5.4)的点组成的集合称为**分岔集**. 也就是说,在空间 $(\boldsymbol{x},\lambda)$ 中的平衡解,其中满足奇点邻近线性化系统矩阵的特征值具有零实部的集合是分岔集.

二、中心流形

在 §4.1 的结尾,我们曾讨论过在奇点邻近线性化的系统矩阵的特征值实部不为零时,根据特征值实部是大于零还是小于零,把

$\boldsymbol{x}$ 空间中的点分为稳定流形和不稳定流形. 现在我们考虑矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值实部的一般情况，假定有 p 个特征值的实部是大于零的，有 q 个特征值的实部是小于零的，有 r 个特征值的实部是等于零的，$p+q+r=n$.

根据定理 6.12，动力系统(6.5.1)拓扑等价于方程

$$\begin{cases} \dot{y}_i = y_i, & i = 1,2,\cdots,p, \\ \dot{y}_i = -y_i, & i = p+1,p+2,\cdots,p+q, \\ \dot{y}_i = 0, & i = p+q+1,p+q+2,\cdots,n. \end{cases} \tag{6.5.6}$$

在变量 $\boldsymbol{y}$ 的空间里，前 p 个坐标组成了一个 p 维子空间 $\mathscr{E}_u$，称为动力系统的**不稳定流形**，后面 q 个坐标组成一个 q 维子空间 $\mathscr{E}_s$，称为动力系统的**稳定流形**，后面 r 个坐标组成一个 r 维子空间 $\mathscr{E}_c$，称为动力系统的**中心流形**. 这些流形都是所给动力系统的不变流形. 我们知道，不变流形在拓扑变换之下还是不变流形. 所以，若采用拓扑变换，把系统变回原来的动力系统，则稳定流形、不稳定流形和中心流形不变，相应地它们的维数也不变.

以上讨论对中心流形来说，还需要做一些补充. 为此，我们先来考查一个例子：

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = -y, \\ \dot{z} = z. \end{cases} \tag{6.5.7}$$

显然 y 轴是稳定流形，z 轴是不稳定流形，x 轴是中心流形.

我们很容易把方程组(6.5.7)的解求出来，得到

$$\begin{cases} x(t) = x_0/(1-tx_0), \\ y(t) = y_0\mathrm{e}^{-t}, \\ z(t) = z_0\mathrm{e}^{t}. \end{cases}$$

在上式中如果消去 t，把 y 和 z 表为 x 的表达式，可以得到

$$\begin{cases} y(x) = (y_0\mathrm{e}^{-1/x_0})\mathrm{e}^{1/x}, \\ z(x) = (z_0\mathrm{e}^{1/x_0})\mathrm{e}^{-1/x}. \end{cases} \tag{6.5.8}$$

上式中可以补充定义：当 $x=0$ 时，y 和 z 的值都为零.

在(x,y)平面上看，若$x<0$，即使初始值(x_0,y_0)不在x轴上，当x增大时(t增大)，$y\to0$；在$x=0$时解和x轴光滑地连接. 所以我们把在$x<0$处的这些曲线和$x>0$处的x轴都看做中心流形. 这样，中心流形可以有无穷多条曲线. 这就是说，中心流形一般说可以是不唯一的，而这些中心流形是在$x=0$处和稳定流形相切的.

相反地，我们在(x,z)平面上就没有这个性质，因为(6.5.8)式中的第二式在$x=0$处是间断的.

上述这个例子所表现的事实是具有普遍意义的，即如果我们记$\mathscr{E}_u$，$\mathscr{E}_s$，$\mathscr{E}_c$为对应于特征值按实部符号所决定的空间，则我们可以得到中心流形$\mathscr{E}_c$在原点和稳定流形$\mathscr{E}_s$相切. 它可以是不唯一的.

从上面的讨论我们知道，在分岔点一定有中心流形存在. 同时，我们还知道，并不是所有的参数λ的值都有中心流形，而只有那些对应于分岔的λ值才能求出中心流形. 所以对求解分岔点集的问题，实际上也就是求中心流形的问题，分岔集是对参数λ的某些值来说的，中心流形是当分岔集给定后，动力系统中的特殊不变流形. 由于中心流形实际上是动力系统稳定流形和不稳定流形的交界，出了中心流形，系统要么稳定要么不稳定. 所以在实际问题中，求解中心流形有时是很关键的.

三、自治系统含参数解的分岔

前面的讨论中，我们只给出了一个含参数的自治系统平衡解分岔的定义. 在实际情况中，我们还可以定义一个含参数的动力系统的分岔.

设我们有自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\lambda),\qquad(6.5.9)$$

它的一个含参数的解为

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(t,\lambda). \tag{6.5.10}$$

为了考查它是否有分岔行为，我们把它作一个微小的扰动 $\boldsymbol{v}(t)$，即有

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}_0(t,\lambda) + \boldsymbol{v}(t). \tag{6.5.11}$$

由于扰动是微小的，所以(6.5.10)和(6.5.11)两式都应当满足方程(6.5.9). 把它们代入(6.5.9)并且把得到的结果相减得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}(t) &= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0(t,\lambda) + \boldsymbol{v}(t),\lambda) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0(t,\lambda),\lambda) \\ &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}(t),t,\lambda).\end{aligned} \tag{6.5.12}$$

这个方程也称为是原方程(6.5.9)的**改变量方程**. 显然 $\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{0}$ 是这个方程的平衡解. 一般说来，方程(6.5.12)不再是自治系统了. 同时，由于扰动 $\boldsymbol{v}(t)$ 的微小性，通常都是将方程(6.5.12)在原点邻近线性化来讨论，得到

$$\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \boldsymbol{A}(t,\lambda)\boldsymbol{v}(t). \tag{6.5.13}$$

现在我们引进含参数解的分岔的定义

定义 6.11 设存在 λ 的某个点 λ_0，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在不同的 λ_1 和 λ_2，使

$$|\lambda_i - \lambda_0| < \varepsilon \quad (i = 1,2),$$

而且对应有方程(6.5.12)的两个解 $\boldsymbol{v}_1(t)$，$\boldsymbol{v}_2(t)$，即

$$\dot{\boldsymbol{v}}_1(t) = \boldsymbol{A}(t,\lambda_1)\boldsymbol{v}_1(t),$$
$$\dot{\boldsymbol{v}}_2(t) = \boldsymbol{A}(t,\lambda_2)\boldsymbol{v}_2(t).$$

如果解 $\boldsymbol{v}_1(t)$，$\boldsymbol{v}_2(t)$ 分别属于不同的等价类，则称 λ_0 为含参数解(6.5.10)的一个**分岔点**.

如果系数矩阵 $\boldsymbol{A}(t,\lambda)$ 是 t 的周期函数，这一般对应于解(6.5.10)是周期解的情形，上面的讨论当然就够了. 不过在一般情形，$\boldsymbol{A}(t,\lambda)$ 并不是 t 的周期函数，这就要求对非自治系统的等价问题作进一步的讨论.

下面我们来给出两个关于分岔问题的例子.

例 1 对于 $x\in(-\infty,+\infty)$ 考虑一维动力系统

$$\dot{x} = \lambda x + x^2, \tag{6.5.14}$$

其中 λ 为参数. 显然,它的平衡解有两个,即

$$\lambda x + x^2 = 0 \tag{6.5.15}$$

的根

$$x = 0 \quad 和 \quad x = -\lambda. \tag{6.5.16}$$

对于在平衡解邻近线性化的系统,在 $x=0$ 邻近有

$$\dot{x} = \lambda x. \tag{6.5.17}$$

在 $x=-\lambda$ 邻近令 $x=-\lambda+y$,代入方程(6.5.14)并对 y 线性化有

$$\dot{y} = -\lambda y. \tag{6.5.18}$$

从(6.5.17)和(6.5.18)两式我们直接可以看出,$\lambda=0$ 是这两个系统的分岔点. 所以在 $\lambda=0$ 的任何邻近都有不等价的两类运动:一类随时间增加远离平衡点;一类趋于平衡点.

现在回过头来在(x,λ)平面上来看平衡解(6.5.16),它是两条直线. 在 $\lambda=0$ 时,两条直线重合,或者说在 $\lambda=0$ 的邻近平衡解从一条分岔为两条,所以它是平衡解的分岔.

例 2　考虑二维动力系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\lambda - (x^2 + y^2)] = f_1(x,y,\lambda), \\ \dot{y} = x + y[\lambda - (x^2 + y^2)] = f_2(x,y,\lambda). \end{cases} \tag{6.5.19}$$

显然 $x=0, y=0$ 是动力系统的一个平衡解,系统在点$(0,0)$的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{6.5.20}$$

这个矩阵的特征值是

$$\mu = \lambda \pm \mathrm{i}. \tag{6.5.21}$$

当 λ 由负变正时,两个特征值 μ 分别沿着实轴的上方和下方穿过虚轴,平衡解$(0,0)$则由稳定平衡状态变为不稳定状态. 当 $\lambda=0$ 时,$\mu=\pm\mathrm{i}$,此时动力系统在平衡解附近出现周期解,因此,我们说动力系统在$(x,y,\lambda)=(0,0,0)$处出现 Hopf 分岔.

如果把方程(6.5.19)化为极坐标的形式,便得到

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = r(\lambda - r^2) = f(r,\lambda), \\ \dot{\theta} = \dfrac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = 1. \end{cases} \tag{6.5.22}$$

就这个问题而言，在极坐标中来研究周期解也可能看得更为清楚一点. 以上第二个方程是很简单的，第一个方程可以和例 1 的问题一样进行讨论，可知在 $\lambda=0$ 时，是它的分岔点. 从分岔开始，在平衡点邻近形成了一个极限环. 随着 λ 的增大，极限环的半径也增大. 极限环的分岔是从一个平衡解分岔出一个极限环，有时也称为**动分岔**.

§6.6 关于线性非自治系统的等价类问题

一、引言

对于线性非自治系统的等价类问题，许多学者进行过研究，因为它关系到非自治系统的分岔和定性行为的分类问题. 早在 19 世纪末，Lyapunov 在他的重要著作《关于运动稳定性的一般问题》(文献[18])中就曾引进了一个被后人称为 Lyapunov 变换的变换，企图在这个变换下把线性的非自治系统化归为自治系统. 他的研究结果说明，对于周期系数的线性非自治系统是可以通过这个变换变为自治系统的，但是并不是所有的线性非自治系统都可以通过这个变换化归为自治系统. 后来虽然还有许多工作，但是大致上没有重要的进展. 人们对于常微分方程在拓扑变换下的分类还主要是集中在自治系统上.

在文献[19]中提出了一种利用等价类的概念进行分岔的定义，后来在文献[20]中发展了这个思想，对于现在存在的两种分岔的定义进行了讨论，指出它们的异同，并且说明只有在等价类的框架下这两种分岔的定义才能得到合理的解释. 在文献[21]中我们曾经对于自治系统的等价类问题给了一个构造性的证明，然而由

于对于非自治系统的等价类还没有实质的进展，因而对于非自治系统分岔的定义问题也就还没有解决.

下面将指出在一定的拓扑变换下，线性非自治系统可以变换为和线性自治系统相同的等价类. 有了这个结果，对非自治系统的分岔问题的讨论，就可以纳入文献[19]和[20]所给出的定义中去了.

二、预备讨论

考虑动力系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}, \tag{6.6.1}$$

这里 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{A}(t)$ 都是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}(t)$ 连续且其行列式的绝对值满足

$$m \leqslant \|\boldsymbol{A}(t)\| \leqslant M, \tag{6.6.2}$$

其中 m, M 为正实数.

引理 1　令 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，对给定的初条件 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{I}$，方程(6.6.1)有解

$$K_0^t(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{I} + \int_0^t \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t + \int_0^t \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t \int_0^t \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t + \cdots; \tag{6.6.3}$$

在条件(6.6.2)之下，解(6.6.3)对于任何的 $0 < T < +\infty$，在 $t \in [0, T]$ 上都是一致收敛的.

结论易于由以初始值 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{I}$ 开始的比卡逼近来得到. 公式(6.6.3)也称为方程(6.6.1)的**预解式**.

如果对方程(6.6.1)引进 Lyapunov 变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{L}(t)\boldsymbol{Y}$，则得到

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{L}^{-1}(t)[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{L}(t) - \boldsymbol{L}'(t)]\boldsymbol{Y}. \tag{6.6.4}$$

同时由线性变换的约当标准形定理我们有下面的引理.

引理 2　可以选择适当的 $\boldsymbol{L}(t)$ 使(6.6.4)式具有形式

$$\dot{\boldsymbol{Y}} = [\boldsymbol{J}(t) - \boldsymbol{L}^{-1}(t)\boldsymbol{L}'(t)]\boldsymbol{Y}, \tag{6.6.5}$$

其中

$$\boldsymbol{J}(t) = \boldsymbol{L}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{L}(t) \tag{6.6.6}$$

为约当标准形

$$\boldsymbol{J}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{J}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{J}_m\end{pmatrix}, \tag{6.6.7}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_j(t)&=\begin{pmatrix}\mu_j(t)+\mathrm{i}\upsilon_j(t) & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_j(t)+\mathrm{i}\upsilon_j(t) & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_j(t)+\mathrm{i}\upsilon_j(t)\end{pmatrix}\\ &=\boldsymbol{M}_j+\mathrm{i}\boldsymbol{N}_j+\boldsymbol{H}_j,\end{aligned} \tag{6.6.8}$$

这里 i 为纯虚数，$\boldsymbol{M}_j$ 和 $\boldsymbol{N}_j$ 分别是矩阵的实部和虚部，而

$$\boldsymbol{H}_j=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

并且 $\boldsymbol{L}(t)$ 的行列式绝对值在 $[0,+\infty)$ 上满足

$$0\leqslant m\leqslant\|\boldsymbol{L}(t)\|\leqslant M. \tag{6.6.9}$$

引理 3 方程(6.6.5)可以经过双方单一的变换

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}(t), \tag{6.6.10}$$

化归为 $\boldsymbol{Z}$ 的方程

$$\dot{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{J}(t)\boldsymbol{Z}. \tag{6.6.11}$$

证明 将(6.6.10)式代入方程(6.6.11)并利用(6.6.5)式得

$$[\boldsymbol{J}(t)-\boldsymbol{L}^{-1}(t)\boldsymbol{L}'(t)]\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}(t)+\boldsymbol{Z}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t},$$

化简得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{Z}^{-1}(-\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{L}')\boldsymbol{Z}\boldsymbol{P}. \tag{6.6.12}$$

这是一个形式和方程(6.6.1)相同的线性方程，它的预解式为

$$P(t)=K_0^t[Z^{-1}(-L^{-1}L')Z].$$

剩下的问题在于证明方程(6.6.12)中的解矩阵$P(t)$的行列式的有界性.

若记$B=Z^{-1}(-L^{-1}L')Z$,方程(6.6.12)可以写为$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=BP$,则有

$$|P(t+\mathrm{d}t)|=|I+B(t)\mathrm{d}t|\,|P(t)|=(1+\mathrm{tr}B(t)\mathrm{d}t)\,|P(t)|,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}|P|}{\mathrm{d}t}=\mathrm{tr}B(t)\,|P|.\qquad(6.6.13)$$

由于$B(t)=[Z^{-1}(-L^{-1}L')Z]$,于是有

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-L(ZBZ^{-1}).\qquad(6.6.14)$$

类似于(6.6.13)式的讨论,在初条件$|L(0)|=1$下同样有

$$|L|=\mathrm{e}^{\int_0^t[-\mathrm{tr}(ZBZ^{-1})]\mathrm{d}\tau}=\mathrm{e}^{\int_0^t-(\mathrm{tr}B)\mathrm{d}\tau}.$$

令$\mathrm{tr}(B)=f(t)$,由于矩阵L的有界性,于是有

$$-M\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^t[-f(\tau)]\mathrm{d}\tau}\leqslant M.\qquad(6.6.15)$$

从上式看出显然积分$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$是有界的.由方程(6.6.13)解出的行列式$|P|$是

$$|P|=c\mathrm{e}^{-\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau},$$

故存在两个正实数M,m,使矩阵P的行列式绝对值满足

$$m\leqslant||P||\leqslant M.$$

这就证明了变换(6.6.10)是双方单值的. ▌

三、线性非自治系统的等价类

如果给了线性非自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x,\qquad(6.6.16)$$

我们把列向量 x 扩展为矩阵 X，而转去讨论方程(6.6.1)，因为(6.6.1)的解的任何列向量都是(6.6.16)的解.

由引理 2 和引理 3，在满足所要求的条件下，存在可逆变换使方程(6.6.1)变为方程(6.6.11)，即

$$\dot{Z} = J(t)Z.$$

这个方程相当于 m 个约当块的方程

$$\dot{Z}_j = J_j(t)Z_j \quad (j = 1,2,\cdots,m).$$

这组方程可以对每一个约当块方程分别来讨论，可以一般地把它们记为一个 k 阶方程，不妨仍用 Z 来表示未知矩阵函数：

$$\dot{Z} = (\mu(t)I + \mathrm{i}\upsilon(t)I + H)Z. \tag{6.6.17}$$

对方程(6.6.17)中的 Z 再做变换

$$Z = \mathrm{e}^{\int_0^t \mathrm{i}\upsilon(t)\mathrm{d}t}\widetilde{Z}, \tag{6.6.18}$$

我们得到 $\widetilde{Z}$ 应当满足方程

$$\dot{\widetilde{Z}} = (\mu(t)I + H)\widetilde{Z}. \tag{6.6.19}$$

对动力系统(6.6.19)再做线性变换

$$\widetilde{Z} = C\widetilde{W}, \tag{6.6.20}$$

这里 C 是 k 阶对角矩阵 $C(t)=\mathrm{diag}(1,\mu(t),\mu^2(t),\cdots,\mu^{k-1}(t))$. 在这个变换下，动力系统(6.6.19)就成为

$$\dot{\widetilde{W}} = \tilde{J}\widetilde{W} - C^{-1}(t)C'(t)\widetilde{W}, \tag{6.6.21}$$

其中 $\tilde{J}=C^{-1}(t)(\mu(t)I+H)C(t)=\mu(t)(I+H)$.

我们看到方程(6.6.21)具有和方程(6.6.20)相同的形式，根据引理 3，可以经过线性变换得到

$$\dot{W} = \tilde{J}(t)W. \tag{6.6.22}$$

现在我们又对于方程(6.6.22)中 W 的一个列向量 w 来讨论，即讨论方程

$$\dot{w} = \tilde{J}w. \tag{6.6.23}$$

在方程(6.6.23)中作非线性变换

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z})=\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}s}\boldsymbol{z}\ (\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}),\quad \boldsymbol{h}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\qquad(6.6.24)$$

这里
$$s=\ln\sqrt{\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}}=\ln\sqrt{\sum_{i=1}^{m}z_i^2}\ .$$

把(6.6.24)式代入方程(6.6.23)，消去 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{H}s}$ 就得到

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\mu(t)(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{z}-\dot{s}\boldsymbol{H}\boldsymbol{z},\qquad(6.6.25)$$

由此得

$$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{z}}=\mu(t)\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{z}-\dot{s}\,\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{z}.$$

考虑到 $\dot{s}=\dfrac{\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{z}}}{\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}}$，上式中 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\dot{s}$，于是上式可以化为

$$(\mu(t)-\dot{s})\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}.$$

由于当 $\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{H})\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\dot{s}=\mu(t)$. 把它代入(6.6.25)便得

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\mu(t)\boldsymbol{z}.\qquad(6.6.26)$$

现在我们给函数 $\mu(t)$ 一个限制条件：存在正常数 a，使

$$\text{当 }\mu(t)>0\text{ 时},0<B<\int_0^t[\mu(t)-a\operatorname{sgn}\mu(t)]\mathrm{d}t<A;$$

$$\text{当 }\mu(t)<0\text{ 时},B<\int_0^t[\mu(t)-a\operatorname{sgn}\mu(t)]\mathrm{d}t<A<0.$$

(6.6.27)

令

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{w}\mathrm{e}^{\int_0^t[\mu(t)-a\operatorname{sgn}(\mu(t))]\mathrm{d}t},\qquad(6.6.28)$$

其中的非零正常数满足条件(6.6.27)的要求，则得

$$\dot{\boldsymbol{w}}=a\operatorname{sgn}(\mu(t))\boldsymbol{w}.$$

再做非线性变换

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}^{a},\qquad(6.6.29)$$

上面的方程就化归为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\operatorname{sgn}(\mu(t))\boldsymbol{x}.\qquad(6.6.30)$$

这就是说，经过连续作上面一系列的变换，我们可以把方程(6.6.16)化为方程(6.6.30). 于是，我们得到了如下的定理：

定理 6.18 在非自治系统(6.6.16)中,若矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 和它的逆矩阵都连续且有界,它的特征值的实部有 n_1 个恒大于一个正实数,有 n_2 个恒小于一个负实数($n_1+n_2=n$),而且它的全部特征值满足条件(6.6.27),则它拓扑等价于

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}, \tag{6.6.31}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 是对角线上有 n_1 个 1 和 n_2 个 -1 的对角阵.

我们把经过变换能够达到标准形(6.6.30)的不同的线性非自治系统称为是**拓扑等价**的.

变换(6.6.23)是同胚变换(可以参阅[21]).变换(6.6.18)的双方有界性是易于验证的.除了引理 2,3 中讨论的变换外,其余变换的单值和可逆性则是显然的.

在讨论完线性非自治系统的等价类之后,应当指出的是,定理 6.18 中要求矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$ 的特征值为恒正或恒负是可以减弱的,即要求它们在 t 充分大后不变号,且大于或小于一个正常数或负常数.

在实际判断一个线性非自治系统的等价类时,并不需要从开始完成上述的一系列变换,而只要求出作为时间 t 的函数的系统矩阵的特征值,并且验证这些特征值函数是否满足定理 6.18 的条件就可以了.

名词索引

B

Bäcklund 变换 §2.6
Bianchi 第二恒等式 §3.4
Bianchi 第一恒等式 §3.4
Birkhoff 方程 §6.2
Birkhoff 函数 §6.2
保角变换 §2.7
闭链 §4.3
闭形 §4.3
边缘算子 §4.3
变换群 §2.7
标架场 §2.1
不变量 §5.4
不变量嵌入法 §5.6

C

Codazzi 方程 §2.4
测地曲率 §2.4
测地线 §2.2，§2.4
次法向量 §2.3

D

Darbaux 定理 §6.1
单位配分 §4.2
等价 §6.4
等价类 §6.4
第二标形 §2.4
第二类 Christoffel 符号 §2.1
第一标形 §2.4
第一类 Christoffel 符号 §2.1
动力系统 §6.3
度量系数 §1.3
对称 §1.4
对合分布 §4.5
对偶空间 §1.2

F

Frenet 公式 §2.3
Frobenius 定理 §4.5
法曲率 §2.4
法向量 §2.3，§2.4
反称 §1.4
反称化 §1.5
非完整系 §2.2
分岔 §6.5
分离变量法 §5.6

G

Gauss 方程 §2.4
Gauss 曲率 §2.4

H

Hamilton 函数 §6.1
Hamilton-Jacobi 方程 §6.1
Hausdorff 空间 §3.1
Hodge 星算子 §1.5
Hopf 分岔 §6.5
弧长 §2.3
活动标架 §2.1

J

奇点 §6.4
积分不变量 §5.4
基底 §1.1
截面 §3.2
浸入子流形 §3.3
静分岔 §6.5
距离 §3.1
距离空间 §3.1
绝对微商 §2.2

K

Killing 向量场 §5.4
Kronecker 符号 §1.4
开覆盖 §3.1
可定向流形 §4.2
可展曲面 §2.6

L

Levi-Civita 符号 §1.6
Lie-Bäcklund 变换 §5.5
Lie 变换群 §5.1
Lie 代数 §4.4
Lie 代数的分类 §5.2
Lie 导数 §4.4
Lie 群核 §5.1
联络空间 §2.1
两点张量场 §2.2
量纲分析 §5.6
流形 §3.1
流形的定向 §4.2

N

内积 §1.3
逆变 §1.1
逆变导数 §2.2

O

欧氏空间 §1.3
欧氏空间的子流形 §2.4

P

Pfaff 导数 §2.2
Pfaff 方程 §4.5
Poincaré 逆定理 §4.3
Poincaré 引理 §4.1
Poisson 括号 §4.4
平衡解 §6.4
平均曲率 §2.4
平行曲面 §2.6

Q

奇异链 §4.3
恰当链 §4.3

恰当形 §4.3
嵌入子流形 §3.3
切丛 §3.2
切空间 §3.2
切平面 §2.4
切向量 §2.3
切映射 §3.3
曲面的焦曲面 §2.6
曲纹坐标 §2.1

R

Ricci 张量 §3.4
Riemann 空间 §2.1
Riemann 流形 §3.1, §3.3
Riemann 曲率张量 §3.4
Routh-Hurwitz 准则 §6.4

S

Sine-Gordon 方程 §2.6
Stokes 定理 §4.2
Symplectic 几何 §6.1
散度 §2.2

T

特征值 §1.6
梯度 §2.2
同构 §5.3
同态 §5.3
拖回映射 §3.3

W

外积 §1.5
外微分 §4.1
外形式 §1.5
微分不变量 §5.4
微分结构 §3.1
微分流形 §3.1
微分同胚 §3.1
微分形式 §4.1
伪 Riemann 空间 §2.1
伪欧氏空间 §1.3
伪球面 §2.6
稳定性 §6.4
无 §2.5

X

相空间 §6.1
相似性理论 §5.6
向量 §1.1
向量空间 §1.1
协变 §1.1
协变导数 §2.2
协调方程 §3.5
旋度 §2.2
旋转 §2.2
旋转曲面 §2.6

Y

右移动 §5.1
余切丛 §3.2
余切空间 §3.2

Z

张量 §1.4
张量丛 §3.2
张量的内积 §1.4
张量空间 §1.4
正交曲线坐标 §2.2
正则子流形 §3.3
直纹面 §2.6
指数映射 §2.7
中心流形 §6.5
主法向量 §2.3
主方向 §2.4
主曲率 §2.4
自对偶 §1.3
自同构 §5.3
左不变向量场 §5.1
左移动 §5.1
坐标 §1.1
坐标变换 §1.1
坐标卡 §3.1
坐标卡集 §3.1
坐标曲线网 §2.4

参考文献

[1] 陈省身，陈维桓. 微分几何讲义. 北京：北京大学出版社，1991.

[2] 侯伯元，侯伯宇. 物理学家用微分几何. 北京：科学出版社，1990.

[3] 威斯顿霍尔兹 C V. 数学物理中的微分形式. 叶以同，译. 武际可，校. 北京：北京大学出版社，1990.

[4] 黄正中. 微分几何导引. 南京：南京大学出版社，1992.

[5] 余扬政，冯承天. 物理学中的几何方法. 北京：高等教育出版社. 1998.

[6] Gilmore R. Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications. New York: A Wiley-interscience Publication, 1974.

[7] Willmore T J. An Introduction to Differential Geometry. Oxford: Oxford University Press, 1983.

[8] Schutz B F. Geometrical Methods of Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

[9] Marsden J E, Ratiu T S. Introduction to Mechanics and Symmetry. New York: Springer-Verlag, 1994.

[10] Berger M, Gostiaux B. Differential Geometry; Manifolds, Curves and Surfaces. Berlin: Springe-Verlag, 1988.

[11] Curtis W D, Miller F R. Differential Manifolds and Theoretical Physics. London: Academic Press, INC, 1985.

[12] Abraham R, Marsden J E. Foudations of Mechanics. New York: The Benjamin, Cumming Publishing Company, 1985.

[13] Dubrovin B A, Fomenko A T, Novikov S P. Modern Geometry-Methods and Applications (I, II, III). Berlin: Springer-

Verlag，1984.

[14] Sattinger D H, Weaver O L. Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics. New York: Springer-Verlag，1986.

[15] Ovisiannikov L V. Group Analysis of Differential Equations. London: Academic Press, 1978.

[16] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations. New York: Springer-Verlag，1989.

[17] Warner F W. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. New York: China Academic Publishers, Springer-Verlag，1983.

[18] Ляпунов АМ. Теория об устойчивости движения Гостехиздат. Москва: ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, 1950.

[19] 武际可. 关于非线性科学和分岔. 太原工业大学校庆文集，1993，24：40-44.

[20] Zhou K, Wu J K. On the definitions of bifurcation, International Journal of Bifurcation and Chaos，1997，7(8).

[21] 周鲲，武际可. 线性系统拓扑分类定理的初等证明. 北京大学学报：自然科学版，1996，32(5)：577-584.

[22] Harley Flander, Differential Forms. New York: Dover Publications, INC, 1989.

[23] Heinrich W. Gugenheimer, Differential Geometry. New York: Dover Publications, INC, 1977.